

Espaces euclidiens

Dans toute la suite, on ne travaillera qu'avec des \mathbb{R} -espaces vectoriels.

1 Produit scalaire

1.1 Définition

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel et φ une application de E^2 dans \mathbb{R} , l'application φ est un produit scalaire sur E , si

(i) elle est bilinéaire :

$$\forall x, y, z \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \varphi(\alpha x + \beta y, z) = \alpha \varphi(x, z) + \beta \varphi(y, z) \\ \varphi(z, \alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(z, x) + \beta \varphi(z, y). \end{cases}$$

(ii) elle est symétrique :

$$\forall x, y \in E, \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$

(iii) elle est positive :

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) \geq 0.$$

(iv) elle est définie :

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) = 0 \implies x = 0_E.$$

Remarques :

- 1) On note généralement le produit scalaire (x, y) ou $\langle x, y \rangle$, on utilisera cette notation dans la suite du texte.
- 2) Pour justifier qu'une application est un produit scalaire, on démontre en général qu'elle est symétrique en premier, pour n'avoir à démontrer la linéarité que d'un côté (à gauche ou à droite).
- 3) La définition du produit scalaire se résume à :

Le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Exemples :

- 1) Le plan \mathbb{R}^2 est muni du produit scalaire canonique $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$.
- 2) L'espace \mathbb{R}^n est muni du produit scalaire canonique $\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
- 3) Soit le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ admet le produit scalaire défini pour $f, g \in E$ par $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Justifions que tout est bien défini et les hypothèses sont satisfaites :

- a) L'existence de l'intégrale est garantie par continuité du produit de 2 fonctions continues.
- b) La symétrie et la bilinéarité sont justifiées par linéarité de l'intégrale et (distributivité et commutativité) du produit. (Ne pas oublier de vérifier toutes les hypothèses du produit scalaire et même quand c'est facile, donner une phrase d'explication.)

c) Le point souvent le plus difficile est le caractère défini positif. Ici, on a pour $f \in E$

$$\langle f, f \rangle = \int_0^1 f(t)^2 dt.$$

Comme les bornes de l'intégrale sont dans le sens croissant et que $\forall t \in [0, 1], f(t)^2 \geq 0$ (par positivité du carré d'un nombre réel), on a $\langle f, f \rangle \geq 0$.

La forme bilinéaire est donc bien positive. Si f est continue, alors $t \mapsto f(t)^2$ est une fonction continue positive. Pour que son intégrale sur un intervalle non réduit à un point soit nul, il faut donc qu'elle soit nulle. On en déduit

$$\langle f, f \rangle = \int_0^1 f(t)^2 dt = 0 \implies (t \mapsto f(t)^2) = (t \mapsto 0),$$

soit f est la fonction nulle. La forme bilinéaire est donc bien définie.

Remarque: Ces 3 exemples de produits scalaires sont au programme, vous pouvez les utiliser directement en exercice, sauf si la démonstration est demandée.

1.2 Propriétés

Proposition 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, alors on a*

$$\forall x, y \in E, \quad \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle,$$

avec égalité si et seulement si x, y colinéaires.

Définition 1. *Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on définit la norme sur E associée ce produit scalaire pour $x \in E$ par*

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

On définit la distance entre deux éléments x, y de E par $d(x, y) = \|x - y\|$.

Remarques :

1. Les propriétés à satisfaire pour être une norme de E sont :

(i) $\forall x \in E, \quad \|x\| \in \mathbb{R}^+.$

(ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$

(iii) $\forall x, y \in E, \quad \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)

(iv) $\forall x \in E, \quad \|x\| = 0 \implies x = 0_E.$

On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour démontrer l'inégalité de droite de (iii). Celle de gauche se démontre en utilisant celle de droite et le fait que $x = x + y - y$ et $y = x + y - x$.

2. Les propriétés à satisfaire pour être une distance de E sont :

(i) $\forall x, y \in E, \quad d(x, y) \in \mathbb{R}_+.$

(ii) $\forall x, y, z \in E, \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

(iii) $\forall x, y \in E, \quad d(x, y) = 0 \implies x = y.$

Cela découle aisément des propriétés de la norme.

Terminologies : Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire muni $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\|\cdot\|$, un tel espace est appelé espace préhilbertien réel, on dit que

1. un vecteur x de E est unitaire si $\|x\| = 1$.

2. 2 vecteurs x, y de E sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$.

3. une famille de vecteurs (x_1, x_2, \dots, x_n) est orthogonale, si

$$\forall i, j \in [1, n], \quad i \neq j \implies \langle x_i, x_j \rangle = 0.$$

4. une famille de vecteurs (x_1, x_2, \dots, x_n) est orthonormée, si elle est orthogonale et de plus

$$\forall i \in [1, n], \quad \|x_i\| = 1.$$

5. E préhilbertien est un espace euclidien, si il est de dimension finie.

Proposition 2. Soit E un espace préhilbertien, soit une famille (x_1, \dots, x_n) de vecteurs orthogonaux, on a alors

1. $\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$ (Pythagore)
2. si la famille (x_1, \dots, x_n) ne contient aucun vecteur nul, alors (x_1, \dots, x_n) est libre.

Remarque : La première est la relation de Pythagore, on retrouve le cas du triangle rectangle dans le plan pour $n = 2$.

Exemple:[Calcul] Soit E un espace préhilbertien, alors on a

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E, \quad (i) \quad \langle x, y \rangle &= \frac{1}{4} \left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \right) \\ (ii) \quad \langle x, y \rangle &= \frac{1}{2} \left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \right) \\ (iii) \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \end{aligned}$$

Remarques : Les deux premières formules sont appelées formules de polarisation, la troisième identité du parallélogramme. Il n'est pas nécessaire de les apprendre par coeur, mais il faut savoir effectuer les manipulations calculatoires, les donnant.

2 Sous-espaces orthogonaux

2.1 Bases orthogonales

Proposition 3 (Algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt). Soient E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de E , alors il existe une base $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_n)$ de E orthogonale, tel que

$$\forall i \in [1, n], \quad \text{Vect}(f_1, \dots, f_i) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i).$$

Preuve :

On construit la base \mathcal{B}' de proche en proche, on pose $e_1 = f_1$. On a bien $\text{Vect}(f_1) = \text{Vect}(e_1)$.

Supposons que l'on ait déjà construit les vecteurs (e_1, \dots, e_i) vérifiant les hypothèses, on a donc

$$\text{Vect}(f_1, \dots, f_i) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i).$$

Si $i = n$, on a terminé.

Sinon $i < n$ et on a

$$\text{Vect}(f_1, \dots, f_i, f_{i+1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i, f_{i+1}),$$

comme (f_1, \dots, f_{i+1}) est une base de $\text{Vect}(f_1, \dots, f_i, f_{i+1})$, grâce au cardinal, $(e_1, \dots, e_i, f_{i+1})$ est aussi une base de $\text{Vect}(f_1, \dots, f_i, f_{i+1})$. On construit e_{i+1} de la forme

$$e_{i+1} = f_{i+1} - \sum_{k=1}^i \alpha_k e_k.$$

Comme on doit avoir pour tout $k \in [1, i]$, e_k orthogonal à e_{i+1} , il faut et il suffit que

$$\forall k \in [1, i], \quad \langle e_k, f_{i+1} \rangle - \sum_{k=1}^i \alpha_k \langle e_i, e_k \rangle = 0.$$

Grâce à l'orthogonalité de la famille (e_1, \dots, e_i) , on en déduit

$$\langle e_k, f_{i+1} \rangle - \alpha_k \langle e_k, e_k \rangle = 0,$$

soit $\alpha_k = \frac{\langle e_k, f_{i+1} \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle}$. Réciproquement, e_{i+1} ainsi construit convient.

Algorithme de Gram-Schmidt :

On peut construire une base orthogonale en utilisant la démarche de la démonstration d'existence, c'est la méthode que l'on implémente informatiquement. C'est l'algorithme de Gram-Schmidt.

Corollaire 1. Soient E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de E , alors il existe une base $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_n)$ de E orthonormée, tel que

$$\forall i \in [1, n], \quad \text{Vect}(f_1, \dots, f_i) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i).$$

Preuve : Il suffit de normaliser la base orthogonale obtenue par l'algorithme de Gram-Schmidt en divisant chaque vecteur e_i par sa norme.

1. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire (preuve laissée au lecteur)

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_3 + x_2y_1 + x_3y_1 + x_3y_2).$$

on utilise la base canonique de \mathbb{R}^3 , $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1, 0)$ et $f_3 = (0, 0, 1)$. On a alors $e_1 = f_1$. On cherche α tel que $e_2 = f_2 - \alpha e_1 = f_2 - \alpha f_1 \perp e_1$. On a donc

$$\langle f_1, f_2 \rangle - \alpha \langle f_1, f_1 \rangle = 0, \text{ soit } \frac{1}{2} - \alpha = 0.$$

Il en résulte que $e_2 = (-\frac{1}{2}, 1, 0)$. On cherche β et γ tel que $e_3 = f_3 - \beta e_1 - \gamma e_2 \perp f_1$ et $e_3 \perp e_2$. On a donc

$$\langle e_1, f_3 \rangle - \beta \langle e_1, e_1 \rangle - \gamma \langle e_1, f_2 \rangle = 0, \text{ soit } \frac{1}{2} - \beta = 0$$

et

$$\langle e_2, f_3 \rangle - \beta \langle e_2, e_1 \rangle - \gamma \langle e_2, e_2 \rangle = 0, \text{ soit } \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\gamma = 0.$$

On trouve alors $\beta = \frac{1}{2}$ et $\gamma = \frac{1}{3}$.

Il en résulte que $e_3 = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$.

On conclut que

$$((1, 0, 0), (-\frac{1}{2}, 1, 0), (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1)) \text{ est une base orthogonale de } E.$$

puis par normalisation

$$((1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 2, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 3)) \text{ est une base orthonormée de } E.$$

2. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de l'application de E^2 dans \mathbb{R} définie par

$$\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0).$$

Vérifions que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire et déterminons base orthonormée de E .

(i) Produit scalaire :

Les propriétés de bilinéarité et de symétrie de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se vérifient directement sur la définition. Pour la propriété définie positive, on a

$$\langle P, P \rangle = P(0)^2 + P'(0)^2 + P''(0)^2 \geq 0,$$

comme somme de carrés de nombres réels. Cette quantité est nulle si et seulement si, $P(0)^2 = P'(0)^2 = P''(0)^2 = 0$, soit $P(0) = P'(0) = P''(0) = 0$. Comme P est au plus de degré 2 et qu'il a 0 comme racine d'ordre au moins 3, P est le polynôme nul. On conclut donc bien que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

(ii) Base orthonormée :

On part de la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$. On pose $P_0 = 1$, puis on cherche $P_1 = X - \alpha$. On a alors

$$\langle 1, X \rangle - \alpha \langle 1, 1 \rangle = 0, \text{ soit } 1 - \alpha = 0.$$

On a donc $P_1 = X - 1$. On cherche alors $P_2 = X^2 - \beta(X - 1) - \gamma$. On a alors

$$\langle 1, X^2 \rangle - \beta \langle 1, X - 1 \rangle - \gamma \langle 1, 1 \rangle = 0, \text{ soit } 1 - \gamma = 0$$

et

$$\langle X - 1, X^2 \rangle - \beta \langle X - 1, X - 1 \rangle - \gamma \langle X - 1, 1 \rangle = 0, \text{ soit } 2 - \beta = 0.$$

On trouve alors $\beta = 2$ et $\gamma = 1$, d'où $P_3 = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$.

On conclut que

$$(1, X - 1, (X - 1)^2) \text{ est une base orthogonale de } E.$$

puis par normalisation

$$(1, (X - 1), \frac{1}{2}(X - 1)^2) \text{ est une base orthonormée de } E.$$

Proposition 4. Soient E un espace euclidien, \mathcal{B} une base orthonormée de E , x et y 2 vecteurs de coordonnées (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) dans la base \mathcal{B} , alors

1. $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$.
2. $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$.

2.2 Sous-espaces orthogonaux

2.2.1 Définition

Soient E un espace préhilbertien et A une partie de E , on appelle orthogonale de A notée A^\perp l'ensemble :

$$A^\perp = \{x \ ; \ x \in E, \ \forall y \in A, \ y \perp x\}.$$

Remarque : La définition ne suppose aucune propriété sur la partie A , le plus souvent A sera soit une partie finie (exemple : dans l'espace \mathbb{R}^3 , une partie réduite à un vecteur non nul et l'orthogonale sera alors un plan), soit un sous-espace vectoriel de E .

2.2.2 Propriétés

Proposition 5. Soient E un espace préhilbertien et A et B deux parties de E , alors on a

$$A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp.$$

Proposition 6. Soient E un espace préhilbertien et A une partie de E ,

$$A^\perp \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.$$

Proposition 7. Soient E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E ,

$$F^\perp \text{ est un sous-espace vectoriel supplémentaire de } F \text{ dans } E \text{ et } (F^\perp)^\perp = F.$$

Remarque :

1. On en déduit en particulier que si E est un espace euclidien et F est un sous-espace vectoriel de E , alors

$$\dim F^\perp = \dim E - \dim F.$$

2. Si F n'est pas de dimension finie, on a seulement F et F^\perp en somme directe et $F \subset (F^\perp)^\perp$.

2.3 Équations d'hyperplan

Ce paragraphe n'est plus au programme, donc il ne concerne que ceux qui veulent aller un peu plus loin.

2.3.1 Définition

Soient E un espace euclidien et H un hyperplan de E . Un vecteur u de E est un vecteur normal à l'hyperplan H , si u est orthogonal à tout vecteur de H .

2.3.2 Propriétés

Pour $a \in E$, on note φ_a l'application de E dans \mathbb{R} définie par $\varphi_a(x) = \langle a, x \rangle$. C'est une forme linéaire sur E .

Proposition 8. Soient E un espace euclidien, \mathcal{B} une base orthonormée de E et a un vecteur non nul de E de composantes (a_1, \dots, a_n) dans \mathcal{B} . Il y a équivalence entre

- (i) H est un hyperplan admettant a comme vecteur normal.
- (ii) H est le noyau de φ_a .
- (iii) H admet pour équation dans la base \mathcal{B} :

$$\sum_{k=1}^n a_k x_k = 0.$$

Proposition 9. Soit E un espace euclidien, l'application

$$\begin{aligned} \psi : E &\longrightarrow L(E, \mathbb{R}) \\ a &\longmapsto \langle a, x \rangle \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.

Corollaire 2. Soit E un espace euclidien. Pour toute forme linéaire f définie sur E , il existe un unique élément a de E tel que pour tout x de E , $f(x) = \langle a, x \rangle$.

3 Projection et symétrie orthogonale

3.1 Définition

Soient E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E .

On appelle projection orthogonale sur F , la projection sur F parallèlement à F^\perp .

On appelle symétrie orthogonale par rapport à F , la symétrie par rapport à F parallèlement à F^\perp .

3.2 Expressions en base orthonormée

Proposition 10. Soient E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ base orthonormée de F .

Le projeté orthogonal $p_F(x)$ d'un vecteur x sur F peut s'exprimer par

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^p \langle e_k, x \rangle e_k.$$

Le symétrique orthogonal $s_F(x)$ d'un vecteur x par rapport à F peut s'exprimer par

$$s_F(x) = 2p_F(x) - x = 2 \left(\sum_{k=1}^p \langle e_k, x \rangle e_k \right) - x.$$

Corollaire 3 (Inégalité de Bessel). Soient E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $p_F(x)$ le projeté orthogonal de x sur F , alors on a

$$\|p_F(x)\| \leq \|x\|.$$

Exemples :

1. Soient E un espace euclidien et D une droite vectorielle de vecteur directeur a , alors $u = \frac{a}{\|a\|}$ est un vecteur unitaire et directeur de D .

Le projeté orthogonal de x sur D s'exprime donc par

$$p_D(x) = \langle u, x \rangle u = \frac{\langle a, x \rangle}{\|a\|^2} a.$$

Le symétrique orthogonal de x par rapport à D s'exprime donc par

$$p_D(x) = 2 \langle u, x \rangle u - x = 2 \frac{\langle a, x \rangle}{\|a\|^2} a - x.$$

Si on souhaite déterminer le projeté orthogonal sur un hyperplan H par exemple $H = \{a\}^\perp$. Il est plus simple d'utiliser l'expression du projeté sur D et d'utiliser la relation sur les projecteurs associés :

$$x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x).$$

On a alors

$$p_H(x) = x - p_D(x) = x - \frac{\langle a, x \rangle}{\|a\|^2} a.$$

2. Lien avec l'algorithme de Gram-Schmidt :

Soient E un espace euclidien, $B = (f_1, \dots, f_n)$ une base de E . On suppose que l'on a déjà exprimé les i premiers vecteurs orthogonaux (e_1, \dots, e_i) tel que

$$F = \text{Vect}(f_1, \dots, f_i) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i).$$

On a donc $(\frac{e_1}{\|e_1\|}, \dots, \frac{e_i}{\|e_i\|})$ base orthonormée de F .

On construit le vecteur e_{i+1} en posant $e_{i+1} = f_{i+1} - \sum_{k=1}^i \alpha_k e_k$ avec $\alpha_k = \frac{\langle e_k, f_{i+1} \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle}$.

On remarque alors que

$$\sum_{k=1}^i \alpha_k e_k = \sum_{k=1}^i \left\langle \frac{e_k}{\|e_k\|}, f_{i+1} \right\rangle \frac{e_k}{\|e_k\|} = p_F(f_{i+1}),$$

avec $p_F(f_{i+1})$ le projeté orthogonal de f_{i+1} sur F .

On en déduit que $e_{i+1} = f_{i+1} - p_F(f_{i+1}) = p_G(f_{i+1})$, où G est le supplémentaire orthogonal de F dans $\text{Vect}(f_1, \dots, f_{i+1})$.

L'algorithme de Gram-Schmidt revient à faire des projections orthogonales de vecteurs.

3.3 Distance à un sous-espace vectoriel

Proposition 11. Soient E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et x un vecteur de E , on appelle distance de x à F notée $d(x, F)$, la quantité

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y).$$

C'est un minimum qui est atteint une unique fois en $p_F(x)$ le projeté orthogonal de x sur F , on a donc

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|.$$

Exemples :

1. Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique.

On considère le plan $\mathcal{P} = \text{Vect}((1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1))$ et le vecteur $x = (1, -1, 0, 1)$. On cherche la distance x à \mathcal{P} , il faut donc déterminer le projeté de x sur \mathcal{P} .

Si l'exercice demandé nécessite la projection de plusieurs vecteurs, vous avez intérêt à calculer une base orthonormée de \mathcal{P} et à utiliser l'expression analytique de la projection dans une base orthonormée donnée en 3.2.

On a :

$$e_1 = (1, 1, 0, 0) \quad \text{et} \quad e_2 = (1, 1, 0, 0) - \alpha(1, 1, 1, 1)$$

avec $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$.

On obtient alors

$$\langle (1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0) \rangle - \alpha \langle (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1) \rangle = 0,$$

soit $\alpha = 1$.

On obtient alors

$$e_1 = (1, 1, 0, 0) \quad \text{et} \quad e_2 = (0, 0, -1, -1),$$

puis en normalisant

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0) \quad \text{et} \quad \tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, -1, -1).$$

Dans le cas présent, on a besoin de calculer seulement un projeté, on peut aussi travailler de manière directe.

On aura

$$p_{\mathcal{P}}(x) = \alpha(1, 1, 0, 0) + \beta(1, 1, 1, 1) \quad \text{et} \quad x - p_{\mathcal{P}}(x) \in \mathcal{P}^{\perp}.$$

il suffit donc d'avoir

$$\langle x - p_{\mathcal{P}}(x), (1, 1, 0, 0) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle x - p_{\mathcal{P}}(x), (1, 1, 1, 1) \rangle = 0,$$

soit

$$\begin{aligned} \langle (1 - \alpha - \beta, -1 - \alpha - \beta, -\beta, 0), (1, 1, 0, 0) \rangle &= 0 \\ \langle (1 - \alpha - \beta, -1 - \alpha - \beta, -\beta, 1 - \beta), (1, 1, 1, 1) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

On obtient alors le système

$$\begin{cases} -2\alpha - 2\beta = 0 \\ 1 - 2\alpha - 4\beta = 0. \end{cases}$$

On obtient comme solution $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}$, soit $p_{\mathcal{P}}(x) = (0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

La distance de x à \mathcal{P} est donc $\|x - p_{\mathcal{P}}(x)\| = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

2. On cherche le minimum de la fonction I définie sur \mathbb{R}^3 par

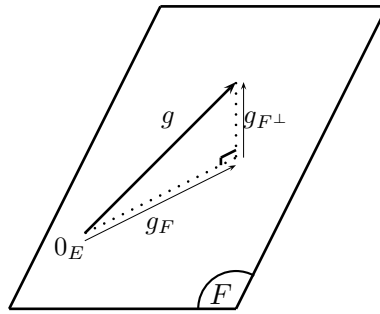
$$I(a, b, c) = \int_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt.$$

Si on pose l'espace vectoriel $E = \text{Vect}(t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto t^2, t \mapsto t^3)$ (sous-espace vectoriels des fonctions continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R}) et le produit scalaire défini sur E par $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ (vérification laissée au lecteur que c'est bien un produit scalaire). On pose $F = \text{Vect}(t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto t^2)$

On remarque alors que

$$\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt = \inf_{f \in F} d(t \mapsto t^3, F)^2 = d(t \mapsto t^3, F)^2.$$

Il faut donc calculer le projeté orthogonal de $g = t \mapsto t^3$ sur F .



Il suffit d'avoir

$$\begin{cases} (t \mapsto t^3 - at^2 - bt - c) \perp (t \mapsto 1) \\ (t \mapsto t^3 - at^2 - bt - c) \perp (t \mapsto t) \\ (t \mapsto t^3 - at^2 - bt - c) \perp (t \mapsto t^2), \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \langle t \mapsto t^3 - at^2 - bt - c, t \mapsto 1 \rangle = 0 \\ \langle t \mapsto t^3 - at^2 - bt - c, t \mapsto t \rangle = 0 \\ \langle t \mapsto t^3 - at^2 - bt - c, t \mapsto t^2 \rangle = 0. \end{cases}$$

On obtient le système

$$\begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{a}{3} - \frac{b}{2} - c = 0 \\ \frac{1}{5} - \frac{a}{4} - \frac{b}{3} - \frac{c}{2} = 0 \\ \frac{1}{6} - \frac{a}{5} - \frac{b}{4} - \frac{c}{3} = 0 \end{cases}$$

On résout et on trouve $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{3}{5}$ et $c = \frac{1}{20}$.

On trouve que le minimum de I est $I(\frac{3}{2}, -\frac{3}{5}, \frac{1}{20}) = \frac{1}{2800}$.