Structure de l'ensemble des solutions

On considère l'équation (E) « $ay''(x)+by'(x)+cy(x) = f(x)$ », où $a \neq 0$, b et c sont des constantes dans $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, une fonction.
L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'équation homogène (EH) « $ay''(x)+by'(x)+cy(x) = 0$ » est constitué de l'ensemble des combinaisons linéaires de deux fonctions y_1 et y_2 (linéairement indépendantes).
L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation homogène (E) est constitué de l'ensemble des fonctions de la forme $\boxed{y_p + Ay_1 + By_2}$, y_p est **une solution particulière** de (E), A, B des constantes dans $\mathbb{K}$.

Cas complexe - Solutions de (EH) « $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ », avec $a \neq 0$, b, c dans $\mathbb{C}$

On considère l'équation caractéristique (EC) : $\boxed{a\lambda^2 + b\lambda + c = 0}$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta \neq 0$: (EC) a deux racines complexes distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$, et les solutions de (EH) sont les fonctions de la forme
$$\boxed{y_h : x \mapsto y_h(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} = Ay_1(x) + By_2(x)}, \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{C}^2.$$
- Si $\Delta = 0$: (EC) a une racine complexe double λ_0, et les solutions de (EH) sont les fonctions de la forme
$$\boxed{y_h : x \mapsto y_h(x) = (A + Bx)e^{\lambda_0 x} = Ae^{\lambda_0 x} + Bxe^{\lambda_0 x} = Ay_1(x) + By_2(x)}, \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{C}^2.$$

Cas réel - Solutions de (EH) « $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ », avec $a \neq 0$, b, c dans $\mathbb{R}$

On considère l'équation caractéristique (EC) : $\boxed{a\lambda^2 + b\lambda + c = 0}$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$: (EC) a deux racines réelles distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$, et les solutions de (EH) sont les fonctions de la forme
$$\boxed{y_h : x \mapsto y_h(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} = Ay_1(x) + By_2(x)}, \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$
- Si $\Delta = 0$: (EC) a une racine réelle double λ_0, et les solutions de (EH) sont les fonctions de la forme
$$\boxed{y_h : x \mapsto y_h(x) = (A + Bx)e^{\lambda_0 x} = Ae^{\lambda_0 x} + Bxe^{\lambda_0 x} = Ay_1(x) + By_2(x)}, \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$
- Si $\Delta < 0$: (EC) possède deux racines complexes, non réelles et conjuguées $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, et les solutions de (EH) sont les fonctions de la forme, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$:
$$\boxed{y_h : x \mapsto y_h(x) = e^{\alpha x}\left[A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\right] = Ae^{\alpha x}\cos(\beta x) + Be^{\alpha x}\sin(\beta x) = Ay_1(x) + By_2(x)}.$$

Un cas particulier - Solutions de (EH) « $y''(x) + cy(x) = 0$ », avec c constante dans $\mathbb{R}$

- Si c = 0.
Les solutions réelles de l'équation $\boxed{\text{« } y'' = 0 \text{ »}}$ (EH) sont de la forme
$$\boxed{y(x) = Ax + B}, \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$
- Si c > 0 : on pose $c = \omega^2 > 0$.
Les solutions réelles de l'équation $\boxed{\text{« } y'' + \omega^2 y = 0 \text{ »}}$ (EH) sont de la forme
$$\boxed{y(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) = C\cos(\omega x + \varphi)}, \quad \text{avec } (A, B, C, \varphi) \in \mathbb{R}^4.$$
- Si c < 0 : on pose $c = -\omega^2 < 0$.
Les solutions réelles de l'équation $\boxed{\text{« } y'' - \omega^2 y = 0 \text{ »}}$ (EH) sont de la forme
$$\boxed{y(x) = A\mathrm{ch}(\omega x) + B\mathrm{sh}(\omega x) = Ce^{\omega x} + De^{-\omega x}}, \quad \text{avec } (A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4.$$

Principe de superposition

- Si y_1 est <u>une</u> solution particulière de l'équation (E_1) « $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f_1(x)$ »,
- si y_2 est <u>une</u> solution particulière de l'équation (E_2) « $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f_2(x)$ »,
- si λ_1 et λ_2 sont des **constantes**,

alors $y_p(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$ fournit <u>une</u> solution particulière de l'équation

$$(E) \text{ « } ay''(x) + by'(x) + cy(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) \text{ ».}$$

Autrement dit, en définissant l'opérateur T par $T : y \mapsto T(y) = ay'' + by' + cy$, on a

$$T(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 T(y_1) + \lambda_2 T(y_2) \text{ (\textit{linéarité} de l'opérateur } T).$$

Problème de Cauchy où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, fonction continue et $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

<u>**Théorème**</u> : l'équation différentielle (E) « $\boxed{ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)}$ » possède **une et une seule solution** y vérifiant la **condition initiale**

$$\boxed{(CI) : \left\{ \begin{array}{rcl} y(x_0) & = & \alpha_0 \\ y'(x_0) & = & \beta_0 \end{array} \right.}$$

où $x_0 \in \mathbb{R}$, $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{C}^2$ sont des constantes FIXÉES.

Recherche d'une solution particulière y_p lorsque $f(x) = \ldots$

- $\boxed{f(x) = k}$, k une constante.
  Si $c \neq 0$: on cherche y_p sous la forme $y_p : x \mapsto y_p(x) = d$, d une constante.
- $\boxed{f(x) = P(x)e^{mx}}$, où P est un polynôme et m une constante.
  On cherche y_p sous la forme $y_p : x \mapsto y_p(x) = Q(x)e^{mx}$, où Q est un polynôme à déterminer.
  <u>Remarque</u> : $\deg(Q) = \deg(P) +$ (ordre de multiplicité de m comme racine de (EC)).
  <u>Un cas particulier</u> : on pourra trouver une solution particulière de $ay''(x)+by'(x)+cy(x) = e^{mx}$ sous la forme $y_p(x) = \lambda x^k e^{mx}$, où k est l'ordre de multiplicité de m comme racine de (EC) ($k = 0$ si m n'est pas racine, $k = 1$ si m est racine simple, $k = 2$ si m est racine double).
- $\boxed{f_1(x) = P(x)e^{mx}\cos(\omega x)}$ ou $\boxed{f_2(x) = P(x)e^{mx}\sin(\omega x)}$,
  où P est un polynôme à coefficients réels et m, ω des constantes réelles.
  On pose $g(x) = f_1(x) + i f_2(x) = P(x)e^{mx}(\cos(\omega x) + i\sin(\omega x)) = P(x)e^{mx}e^{i\omega x} = P(x)e^{(m+i\omega)x}$.
  Autrement dit : $f_1(x) = \mathrm{Re}(g(x)) = \mathrm{Re}\left(P(x)e^{(m+i\omega)x}\right)$ et $f_2(x) = \mathrm{Im}(g(x)) = \mathrm{Im}\left(P(x)e^{(m+i\omega)x}\right)$.
  On cherche $z_p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, une solution particulière de (voir méthode précédente, a, b et c réels)

  $$(F) \text{ « } \boxed{az''(x) + bz'(x) + cz(x) = g(x) = f_1(x) + i f_2(x) = P(x)e^{(m+i\omega)x}} \text{ ».}$$

  Puis $z_p(x) = y_{p1}(x) + i y_{p2}(x)$, où

  ♡ $y_{p1}(x) = \mathrm{Re}(z_p(x))$ est une solution particulière de
  $$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = P(x)e^{mx}\cos(\omega x) = f_1(x) = \mathrm{Re}(g(x))$$

  ♡ $y_{p2}(x) = \mathrm{Im}(z_p(x))$ est une solution particulière de
  $$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = P(x)e^{mx}\sin(\omega x) = f_2(x) = \mathrm{Im}(g(x)).$$

  <u>Un cas particulier important</u> : on pourra trouver une solution particulière de

  « $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = \cos(\omega x)$ » (ou « $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = \sin(\omega x)$ »)

  en prenant la partie réelle (ou imaginaire) d'une solution de « $az''(x) + bz'(x) + cz(x) = e^{i\omega x}$ ».