Equation homogène

Exercice 1 *Donner une équation différentielle homogène du second ordre à coefficients constants ayant pour solutions*

① $y_1(x) = e^{2x}$ *et* $y_2(x) = e^x$ ② $y_1(x) = e^x$ *et* $y_2(x) = 2xe^x$ ③ $y_1(x) = \cos(2x)$ *et* $y_2(x) = \sin(2x)$
④ $y_1(x) = 2$ *et* $y_2(x) = 3x$ ⑤ $y_1(x) = e^{2x}\cos x$ *et* $y_2(x) = e^{2x}\sin x$ ⑤ $y(x) = e^x(\cos x + \sin x)$

Exercice 2 *Résoudre les équations différentielles :*

① $y'' - 3y' + 2y = 0$ ② $y'' - 2y' + 2y = 0$ ③ $y'' + 6y' + 13y = 0$ ④ $y'' - 2\sqrt{2}y' + 2y = 0$

Equation avec second membre

Exercice 3 *Résoudre les équations différentielles :*

① $4y'' - y = 2t^2 + 1$ ② $y'' + y = \cos(t)$ ③ $y'' - 2y' = \mathrm{sh}^2(t)$
④ $y'' - 2y' + y = \mathrm{sh}(t)$ ⑤ $2y'' + 2y' + y = te^{-t}$ ⑥ $y'' - 4y' + 4y = e^t + (3t-1)e^{2t} + t - 2$
⑦ $y'' + 4y = t\cos^2(t)$ ⑧ $y'' + 2y' + 2y = \mathrm{ch}(t)\cos(t)$ ⑨ $y'' - 3y' + 2y = e^{2t}\cos(t) + e^t$

Exercice 4 *Résoudre les problèmes*

① $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = x^2 - 3x \\ y(1) = 0,\ y'(1) = 0 \end{cases}$ ② $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 9e^x - 2 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases}$

Exercice 5 *On considère l'équation différentielle* $y'' + y' - 2y = 2x + 1$.

1. *Déterminer la solution générale de cette équation.*
2. *Déterminer l'unique solution* f *telle que* $f(0) = 0$ *et la courbe représentative de* f *admet une asymptote oblique en* $+\infty$. *Etudier alors les variations de* f.

Exercice 6 *Soit* a *un paramètre réel, résoudre, en fonction de* a *l'équation différentielle*

$$y'' - (1+a)\,y' + ay = e^x$$

Exercice 7 *Résoudre l'équation différentielle suivantes :*

$$y'' + 2y' + 2y = \sin(ax)\,e^{-x}$$

en fonction du paramètre a.

Exercice 8 *Déterminer les solutions sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle*

$$y'' - 2ay' + \left(a^2 + 1\right) y = \sin t + te^{at} \tag{E}$$

lorsque a *est un paramètre réel.*

Exercice 9 *Résoudre en fonction de* $m \in \mathbb{R}$ *:*

$^{(a)}$ $y'' - 2y' + my = \cos(t)$ $^{(b)}$ $my'' + (1+m^2)y' + my = te^t$

Exercice 10 *Montrer que* $\forall m \in \,]0,2[\quad (E_m)\quad y'' + (1-2m)y' - 2my = e^{2t}$ *admet une unique solution* $y_m(t)$ *telle que* $y_m(0) = y'_m(0) = 0$ *et que* $\forall t \in \mathbb{R}$ *à* t *fixé,* $y_m(t) \underset{m\to 1}{\longrightarrow} y_1(t)$.

Exercice 11 *Résoudre* $y'' - 2y' + y = e^x \ln(x)$ *sur* $]0,+\infty[$ *(on cherchera une solution particulière sous la forme* $y_p(x) = e^x z(x)$*).*

Exercice 12 *Soit l'équation*

$$y'' + y = \frac{2}{\sin^3 t} \tag{1}$$

1. *Résoudre l'équation homogène sur* $\mathbb{R}$.

2. *Soit y_0 une solution de l'équation homogène (à vous de la choisir), en posant $y(t) = z(t)\, y_0(t)$, résoudre (1) sur $]0,\pi[$ (On trouvera comme solutions : $C_1 \cos t + C_2 \sin t + \dfrac{1}{\sin t}$).*

Problèmes liés

Exercice 13 *Deux équations couplées.*

1. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = e^x$.*
2. *Trouver les solutions du système d'équations différentielles*

$$\begin{cases} y' - z = 0 \\ 2y + z' - 3z = e^x \end{cases}$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $z(0) = 0$. Calculer alors $\displaystyle\int_0^1 z(x)\, dx$.

Exercice 14 *Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'' - 2y' + 2y = 0$ avec les conditions $y(0) = 0$ et $\sup\limits_{[0,\pi]} y(t) = 1$.*

Exercice 15 *Trouver f dérivable telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) + f(-t) = te^t$.*

Exercice 16 *Soit f telle que $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 2e^x$, indiquez si les propositions suivantes sont vraies ou fausses*

1. *Si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0$ (Justifiez votre réponse).*
2. *Si $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$ (Justifiez votre réponse).*

Exercice 17 *Soit f définie sur $\mathbb{R}$, dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)^2 - f(x)^2 = 1 \text{ et } f'(0) = 1$$

Déterminer f.

Exercice 18 *Trouver toutes les fonctions f et g continues sur $\mathbb{R}$ qui vérifient*

$$\int_0^x f(t)\, dt = x + g(x) \quad \text{et} \quad \int_0^x g(t)\, dt = x + f(x) - 1$$

Pour mémoire si f est continue sur $\mathbb{R}$, alors $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$ est l'unique primitive de f qui prend la valeur 0 en $x = 0$. En particulier F est dérivable et $F'(x) = f(x)$.

Exercice 19 *Déterminer les fonctions f dérivables sur $]0,+\infty[$ telles que $f'(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On pourra commencer par montrer que f vérifie une équation différentielle du second ordre à coefficients non constants, puis poser $g(x) = f(e^x)$.*

Exercice 20 *On considère l'équation différentielle*

$$(1 + 2x)\, y'' + (4x - 2)\, y' - 8y = 0$$

1. *Déterminer une solution de l'équation de la forme $y(x) = e^{\alpha x}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$*
2. *On pose alors $y(x) = e^{\alpha x} z(x)$. Quelle est alors l'équation différentielle vérifiée par z ?*
3. *En déduire les solutions de (E) sur $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.*
4. *Déterminer la solution qui vérifie $y(0) = 1$ et la tangente en $x = 0$ coupe l'axe Ox au point d'abscisse $x = 1$.*

Exercice 21 *On considère l'équation différentielle (E) : $x^2 y'' + y = 0$. La résoudre sur $I =]0,+\infty[$ en posant, pour y solution, $z(x) = y(e^x)$.*