INTRODUCTION

But : on appelle **équation différentielle linéaire du 2nd ordre**, une équation de la forme «$a(x)y''(x)+b(x)y'(x)+c(x)y(x)=f(x)$», où a,b,c et f sont des fonctions continues sur une partie D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), le problème étant de trouver toutes les fonctions $y : D \to \mathbb{K}$, dérivables deux fois sur D et qui vérifient l'équation sur D.
Dans ce chapitre, on s'intéresse uniquement aux cas où a, b et c sont des fonctions constantes (avec $a \neq 0$), et f une fonction d'un type particulier (cas rencontrés fréquemment en physique). Le cas général sera abordé lors du cours de spé.
Attention : il s'agit ici d'une base de cours, tous les exemples d'illustration seront traités en classe.

ÉDL DU 2nd ORDRE A COEFFICIENTS CONSTANTS

I - Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes (ou réelles !).
Soit a, b et c, trois constantes complexes, avec $a \neq 0$ (i.e $(a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$).
On cherche toutes les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, au moins deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, et qui vérifient, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'**équation différentielle linéaire du 2nd ordre à coefficients constants** (noté, entre nous, EDL$_2$) :

$$\text{« } ay''(x)+by'(x)+cy(x)=f(x) \text{ » } (E).$$

On appelle «équation homogène associée» l'équation suivante (dite *sans second membre*) :

$$\text{« } ay''(x)+by'(x)+cy(x)=0 \text{ » } (EH).$$

Dans un premier temps, on cherche les solutions y à valeurs complexes (même si a, b, c et $f(x)$ sont des réels), puis, dans un second temps, lorsque les coefficients et $f(x)$ sont réels, il n'y a plus qu'à chercher, parmi les solutions précédentes, celles qui sont à valeurs réelles.

II - Structure des ensembles de solutions

On note :
$\mathcal{S}$ = l'ensemble des solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de l'équation (E) : « $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=f(x)$ »

et

$\mathcal{S}_H$ = l'ensemble des solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de l'équation (EH) : « $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=0$ »

Prop 1 : l'ensemble $\mathcal{S}_H$ est stable par combinaison linéaire.

Autrement dit,
si u et v appartiennent à $\mathcal{S}_H$, alors, pour tous λ, μ dans $\mathbb{C}$ (constantes), $\lambda u+\mu v$ est aussi dans $\mathcal{S}_H$.

En effet, posons $w=\lambda u+\mu v$: alors $w'=\lambda u'+\mu v'$ et $w''=\lambda u''+\mu v''$, donc
$aw''+bw'+cw=a(\lambda u''+\mu v'')+b(\lambda u'+\mu v')+c(\lambda u+\mu v)=\lambda(au''+bu'+cu)+\mu(av''+bv'+cv)$
d'où $aw''+bw'+cw=\lambda(\tilde{0})+\mu(\tilde{0})=\tilde{0}$, car u et v vérifient (EH) ! Cette dernière égalité implique bien que $w=\lambda u+\mu v$ est élément de $\mathcal{S}_H$!
Autre présentation : on définit l'opérateur T qui, à toute fonction y, associe la fonction $ay''+by'+cy$,

$$\boxed{T : y \longmapsto T(y)=ay''+by'+cy}.$$

La dérivation étant une opération linéaire, on en déduit sans difficulté :

si λ, μ sont des **constantes** et u, v des **fonctions**, $\boxed{T(\lambda u+\mu v)=\lambda T(u)+\mu T(v)}$.
On dit que l'opérateur T est **linéaire**.
On peut redéfinir les ensembles de solutions $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_H$ par

$$\boxed{\mathcal{S}=\{y \text{ telles que } T(y)=f\} \text{ et } \mathcal{S}_H=\{y \text{ telles que } T(y)=0\}}.$$

La preuve de la stabilité de $\mathcal{S}_H$ par combinaison linéaire est alors évidente : si u et v sont dans $\mathcal{S}_H$, alors $T(u)=T(v)=0$, donc, avec λ, μ constantes, $T(\lambda u+\mu v)=\lambda T(u)+\mu T(v)=\lambda 0+\mu 0=0$ i.e $T(\lambda u+\mu v)=0$ donc $\lambda u+\mu v$ est dans $\mathcal{S}_H$.
Remarque : il est évident que, $\tilde{0}$, la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, appartient à $\mathcal{S}_H$ (par exemple, $T(\tilde{0})=a\tilde{0}''+b\tilde{0}'+c\tilde{0}=a\tilde{0}+b\tilde{0}+c\tilde{0}=\tilde{0}$ donc $\tilde{0}\in\mathcal{S}_H$). Avec la stabilité par combinaison linéaire que l'on vient de prouver, on verra plus tard que cela implique que

$$\boxed{\mathcal{S}_H \text{ a une structure d'}\textit{espace vectoriel}}.$$

Prop 2 : $\boxed{\text{la différence de deux éléments de } \mathcal{S} \text{ appartient à } \mathcal{S}_H.}$
En effet : si les fonctions y_1 et y_2 sont dans $\mathcal{S}$, alors elles vérifient (E) toutes les deux. On a, sur $\mathbb{R}$: $ay_1''+by_1'+cy_1=f(x)$ et $ay_2''+by_2'+cy_2=f(x)$. D'où, par soustraction des égalités : $a(y_1''-y_2'')+b(y_1'-y_2')+c(y_1-y_2)=f(x)-f(x)=0$, donc (y_1-y_2) est solution de (EH), donc $(y_1-y_2)\in\mathcal{S}_H$.
Autre présentation : avec l'opérateur T, c'est immédiat. En effet, si y_1 et y_2 sont dans $\mathcal{S}$, on a $T(y_1)=f$ et $T(y_2)=f$ d'où, par linéarité de T, $T(y_1-y_2)=T(y_1)-T(y_2)=f-f=0$ i.e $T(y_1-y_2)=0$ donc (y_1-y_2) appartient à S_H.
Conséquence :
Prop 3 : $\boxed{\mathcal{S}=y_p+\mathcal{S}_H}$, où y_p est un élément quelconque de $\mathcal{S}$.
Attention : l'écriture $\mathcal{S}=y_p+\mathcal{S}_H$ n'a, *a priori*, pas de sens (somme d'une fonction et d'un ensemble ?) ! Elle signifie juste que les éléments de $\mathcal{S}$ se décrivent sous la forme $y=y_p+y_h$, où y_p est un élément de $\mathcal{S}$ (i.e une solution de (E)), et y_h décrit l'ensemble $\mathcal{S}_H$ (i.e y_h désigne toutes les solutions de (EH)).
Preuve : supposons connue y_p, une solution de (E) (donc $y_p\in\mathcal{S}$). Pour tout autre élément $y\in\mathcal{S}$, on a vu que $y-y_p$ appartient à $\mathcal{S}_H$, donc il existe $y_h\in\mathcal{S}_H$ tel que $y-y_p=y_h$ (i.e) $y=y_p+y_h$ (i.e) $y\in(y_p+\mathcal{S}_H)$. On vient de prouver l'inclusion d'ensembles : $\mathcal{S}\subset(y_p+\mathcal{S}_H)$.
Réciproquement, si y s'écrit $y=y_p+y_h$ avec $y_h\in\mathcal{S}_H$, alors
$ay''+by'+cy=a(y_p''+y_h'')+b(y_p'+y_h')+c(y_p+y_h)=(ay_p''+by_p'+cy_p)+(ay_h''+by_h'+cy_h)=f(x)+0=f(x)$, donc y appartient à $\mathcal{S}$. Cette réciproque se prouve facilement à l'aide de l'opérateur T : si $y=y_p+y_h$ avec $T(y_h)=0$ et $T(y_p)=f$, alors $T(y)=T(y_p+y_h)=T(y_p)+T(y_h)=f+0=f$ donc $y\in\mathcal{S}$.
Ceci prouve l'inclusion inverse $(y_p+\mathcal{S}_H)\subset\mathcal{S}$, d'où l'égalité des ensembles.
Ainsi : $\mathcal{S}=y_p+\mathcal{S}_H$. On dit que $\boxed{\mathcal{S} \text{ a une structure d'}\textit{espace affine}}$.
Ce qu'il faut retenir :
pour décrire toutes les solutions de (E), il suffit de connaître UNE solution particulière y_p de (E), et de lui ajouter TOUTES les solutions de l'équation homogène associée (EH).

III - Description de $\mathcal{S}_H$

Le but est, ici, de résoudre l'EDLH$_2$

$$\boxed{\text{« } ay''(x)+by'(x)+cy(x)=0 \text{ » } (EH)}, \text{ avec } a,b,c\in\mathbb{C} \text{ et } a\neq 0.$$

On définit l'**équation caractéristique associée**

$$\boxed{\text{« } a\lambda^2+b\lambda+c=0 \text{ » } (EC)}.$$

Idée : on cherche d'abord une solution de (EH) sous forme d'une fonction exponentielle. Précisément, on cherche, si c'est possible, λ constante (dans $\mathbb{C}$) telle que la fonction $y : x \mapsto y(x) = e^{\lambda x}$ soit une solution de (EH).
On rappelle : $y(x) = e^{\lambda x}$ donc $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ et $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Ainsi :
$(y \in \mathcal{S}_H) \Leftrightarrow (ay'' + by' + cy = 0) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0$ i.e $e^{\lambda x}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0)$.
Or, on sait que, $\boxed{\text{pour tout } z \in \mathbb{C},\ e^z \neq 0}$. Attention, e^z est complexe, dire «$e^z > 0$» n'a pas de sens !
Rappel : $e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}e^{i\beta} = e^{\alpha}(\cos(\beta) + i\sin(\beta))$ (si α et β sont des réels), d'où $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} > 0$.
Donc : $(y \in \mathcal{S}_H) \Leftrightarrow (a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ i.e λ est une racine de (EC)).
Deux cas se présentent : (EC) a une racine double OU deux racines distinctes.

1er cas : $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$

L'équation (EC) possède deux racines (complexes) *distinctes* λ_1 et λ_2. On a donc déjà deux fonctions distinctes qui vérifient (EH) : $(y_1 : x \mapsto e^{\lambda_1 x})$ et $(y_2 : x \mapsto e^{\lambda_2 x})$. Donc $y_1 \in \mathcal{S}_H$ et $y_2 \in \mathcal{S}_H$.
MAIS on sait que $\mathcal{S}_H$ est stable par combinaison linéaire ! Donc on est assuré que toutes les combinaisons linéaires de y_1 et de y_2 sont aussi dans $\mathcal{S}_H$.
Remarque : **l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de** y_1 **et** y_2 se note $\boxed{\mathrm{vect}(y_1, y_2)}$, c'est l'ensemble de toutes les fonctions de la forme $Ay_1 + By_2$ avec A, B constantes. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{vect}(y_1, y_2) = \{Ay_1 + By_2 \mid (A, B) \in \mathbb{C}^2\}}.$$

Pour l'instant, on est assuré d'avoir l'inclusion $\mathrm{vect}(y_1, y_2) \subset \mathcal{S}_H$, autrement dit : l'ensemble $\mathcal{S}_H$ contient toutes les combinaisons linéaires des fonctions y_1 et y_2. LA question est : y-a-t'il d'autres solutions dans $\mathcal{S}_H$? La réponse est : NON, mais il faut le prouver. Allons-y !
Soit $y \in \mathcal{S}_H$, une solution de l'équation (EH) : définissons alors la fonction z par $z(x) = e^{-\lambda_1 x}y(x)$, donc $y(x) = z(x)e^{\lambda_1 x}$ i.e $y = z \times y_1$. Rappel : $y_1' = \lambda_1 y_1$ et $y_1'' = \lambda_1^2 y_1$
En dérivant deux fois (A RETENIR : $(uv)' = u'v + uv'$ et $\boxed{(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''}$) :
- $y' = z'y_1 + zy_1' = z'y_1 + z\lambda_1 y_1 = (z' + \lambda_1 z)y_1$
- $y'' = z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1'' = z''y_1 + 2z'\lambda_1 y_1 + z\lambda_1^2 y_1 = (z'' + 2\lambda_1 z' + \lambda_1^2 z)y_1$.

Or, y est une solution de (EH) : $ay'' + by' + cy = 0$, d'où
$a(z'' + 2\lambda_1 z' + \lambda_1^2 z)y_1 + b(z' + \lambda_1 z)y_1 + czy_1 = 0$.
On factorise par y_1 : $\left[a(z'' + 2\lambda_1 z' + \lambda_1^2 z) + b(z' + \lambda_1 z) + cz\right] y_1 = 0$.
Mais y_1 n'est jamais nulle : $\forall x \in \mathbb{R},\ y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \neq 0$.
L'équation devient : $a(z'' + 2\lambda_1 z' + \lambda_1^2 z) + b(z' + \lambda_1 z) + cz = 0$.
On ré-ordonne : $\boxed{az'' + (2a\lambda_1 + b)z' + (a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c)z = 0}$.
Mais λ_1 est un des zéros de l'équation (EC) : $a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c = 0$. On obtient donc :
$az'' + (2a\lambda_1 + b)z' = 0$. Donc $\boxed{Z = z'}$ est solution de l'EDLH$_1$: $aZ' + (2a\lambda_1 + b)Z = 0$, avec a constante non nulle, donc $Z = z'$ est solution de l'EDLH$_1$: $Z' + (2\lambda_1 + \dfrac{b}{a})Z = 0$.

N'oublions pas que λ_1 et λ_2 sont les racines du polynôme $P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$, donc : $\boxed{\lambda_1 + \lambda_2 = -\dfrac{b}{a}}$,
(i.e) $\dfrac{b}{a} = -\lambda_1 - \lambda_2$ et enfin $2\lambda_1 + \dfrac{b}{a} = \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$.
Donc $Z = z'$ est solution de l'EDLH$_1$: $\boxed{Z' + (\lambda_1 - \lambda_2)Z = 0}$.
On sait résoudre ce type d'EDLH$_1$ à coefficient constant : il existe une constante $k \in \mathbb{C}$ telle que

$$Z(x) = z'(x) = ke^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

D'où l'on tire : il existe une constante $l \in \mathbb{C}$ telle que

$$z(x) = \frac{k}{\lambda_2-\lambda_1}e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} + l \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Ce qui revient à : il existe deux constantes $A, B \in \mathbb{C}$ telles que

$$z(x) = Be^{(\lambda_2-\lambda_1)x} + A \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = z(x)e^{\lambda_1 x} = Be^{\lambda_2 x} + Ae^{\lambda_1 x} = By_2(x) + Ay_1(x)$.

Pour résumer : on vient de prouver que, si y est solution de (EH), alors y est nécessairement une combinaison linéaire des fonctions y_1 et y_2. Or, on savait déjà que ces combinaisons linéaires étaient solutions, ce qui permet d'affirmer :

si $\Delta \neq 0$, les solutions de (EH) sont exactement les fonctions de la forme

$$(x \mapsto Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}), \text{ avec } A, B \in \mathbb{C} \text{ (constantes)}.$$

L'ensemble des solutions est

$\mathcal{S}_H = \text{vect}(y_1, y_2) = \{Ay_1 + By_2 \mid (A, B) \in \mathbb{C}^2\}$: $\boxed{\mathcal{S}_H \text{ a une structure de } \textbf{plan vectoriel}}$.

2$^{\text{nd}}$ cas : $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

L'équation (EC) possède une racine (complexe) *double* $\boxed{\lambda_0 = -\dfrac{b}{2a}}$. Pour l'instant, on a UNE solution de (EH), la fonction $(y_1 : x \mapsto y_1(x) = e^{\lambda_0 x}$, ce qui permet d'en trouver une infinité d'autres (grâce à la stabilité par combinaison linéaire de $\mathcal{S}_H$) : toutes les fonctions «colinéaires» à y_1 (i.e) les fonctions de la forme ky_1 ($k \in \mathbb{C}$, constante). Problème : y-en-a-t'il d'autres ? La réponse est ...... OUI ! Nous allons les déterminer toutes en nous inspirant de la méthode employée dans le 1$^{\text{er}}$ cas.

Pour toute fonction y, on définit la fonction z par $\boxed{z(x) = y(x)e^{-\lambda_0 x}}$. On reprend les calculs effectués ci-dessus, mais cette fois-ci, on travaille par équivalence.

$$\begin{aligned}
(y \text{ appartient à } \mathcal{S}_H) &\Leftrightarrow (ay'' + by' + cy = 0)\\
&\Leftrightarrow (az'' + (2a\lambda_0 + b)z' + (a\lambda_0^2 + b\lambda_0 + c)z = 0)
\end{aligned}$$

Mais λ_0 est la racine double de (EC), donc $\boxed{a\lambda_0^2 + b\lambda_0 + c = 0 \text{ et } 2a\lambda_0 + b = 0}$! D'où

$$\begin{aligned}
(y \text{ appartient à } \mathcal{S}_H) &\Leftrightarrow (az'' = 0 \text{ (i.e), avec } a \neq 0 \ : \ z'' = 0)\\
&\Leftrightarrow (\text{il existe deux constantes } A \text{ et } B \text{ telles que } : \forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = A + Bx)\\
&\Leftrightarrow (\exists A, B \in \mathbb{C} : \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = e^{\lambda_0 x}z(x) = Ae^{\lambda_0 x} + Bxe^{\lambda_0 x} = Ay_1(x) + By_2(x))\\
&\Leftrightarrow (y \text{ est une combinaison linéaire des fonctions } y_1 \text{ et } y_2)
\end{aligned}$$

où $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ et $y_2(x) = xe^{\lambda_0 x}$.

Comme on a travaillé par équivalence, ceci permet d'affirmer :

si $\Delta = 0$, les solutions de (EH) sont exactement les fonctions de la forme

$$(x \mapsto Ae^{\lambda_0 x} + Bxe^{\lambda_0 x}), \text{ avec } A, B \in \mathbb{C} \text{ (constantes)}.$$

L'ensemble des solutions est

$\mathcal{S}_H = \text{vect}(y_1, y_2) = \{Ay_1 + By_2 \mid (A, B) \in \mathbb{C}^2\}$: $\boxed{\mathcal{S}_H \text{ a une structure de } \textbf{plan vectoriel}}$.

RÉSUMÉ : résolution de $ay'' + by' + cy = 0$ (EH), avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

On considère l'équation caractéristique (EC) : $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta \neq 0$: (EC) a deux racines complexes distinctes $\boxed{\lambda_1 \neq \lambda_2}$, et les solutions de (EH) sont les fonctions de la forme $(x \mapsto Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} = Ay_1(x) + By_2(x))$.
  On a $\mathcal{S}_H = \text{vect}(y_1, y_2) = \{Ay_1 + By_2 \mid (A, B) \in \mathbb{C}^2\}$ *(plan vectoriel)*
  $$\mathcal{S}_H = \left\{ y_h : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & y_h(x) = Ay_1(x) + By_2(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} \end{array} \right., \quad (A, B) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$
  i.e $\boxed{\mathcal{S}_H = \{Ay_1 + By_2 \mid (A, B) \in \mathbb{C}^2\} \text{ où } y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \text{ et } y_2(x) = e^{\lambda_2 x}}$.
- Si $\Delta = 0$: (EC) a une $\boxed{\text{racine complexe double } \lambda_0}$, et les solutions de (EH) sont les fonctions

de la forme $(x \mapsto Ae^{\lambda_0 x} + Bxe^{\lambda_0 x} = Ay_1(x) + By_2(x))$.
On a $\mathcal{S}_H = \text{vect}(y_1, y_2) = \{Ay_1 + By_2 \mid (A,B) \in \mathbb{C}^2\}$ *(plan vectoriel)*

$$\mathcal{S}_H = \left\{ y_h : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & y_h(x) = Ay_1(x) + By_2(x) = Ae^{\lambda_0 x} + Bxe^{\lambda_0 x} \end{array} \right. , \quad (A,B) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

i.e $\boxed{\mathcal{S}_H = \{Ay_1 + By_2 \mid (A,B) \in \mathbb{C}^2\} \text{ où } y_1(x) = e^{\lambda_0 x} \text{ et } y_2(x) = xe^{\lambda_0 x}}$.

Remarque : on rappelle que $\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_H$. On dit que $\mathcal{S}$ a une structure de **plan affine** (dessin !).

IV - Recherche des solutions réelles de $\mathcal{S}_H$

Lorsque les constantes a, b et c sont réelles, et que f (le second membre) est à valeurs réelles (i.e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), on peut être amené à rechercher les solutions réelles de l'équation différentielle (E), i.e les fonctions solutions à valeurs réelles $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Dans ce paragraphe, on suppose les constantes a, b et c sont réelles : $\boxed{(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}}$.
L'équation caractéristique (EC) «$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$» possède un $\boxed{\text{discriminant } \Delta = b^2 - 4ac \text{ réel}}$.
On cherche, dans chaque cas, les solutions y de (EH) «$ay'' + by' + cy = 0$» vérifiant

«pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x)$ est un réel» ?

Résultat préliminaire

Soit $\omega_1 \neq \omega_2$, deux **complexes distincts**, et A, B, deux complexes quelconques.
On a l'équivalence :

$$\boxed{(\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x} = 0\ ) \Leftrightarrow (A = B = 0)}$$

Preuve :

- Le sens $\Leftarrow$ est évident !
- Montrons le sens $\Rightarrow$. On suppose donc :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x} = 0 \ (1).$$
Cette égalité étant valable pour tout x de $\mathbb{R}$, on peut la dériver par rapport à x ($\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$). On obtient :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \omega_1 Ae^{\omega_1 x} + B\omega_2 e^{\omega_2 x} = 0 \ (2).$$
De (1) et (2), vraies pour tout réel x, on déduit, en prenant $x = 0$, le système suivant
$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} A & + & B & = & 0 \\ \omega_1 A & + & \omega_2 B & = & 0 \end{array} \right. .$$
Par opération sur les lignes ($L_2 \leftarrow L_2 - \omega_1 L_1$), le système est équivalent à
$$\left\{ \begin{array}{lcccl} A & + & B & = & 0 \\ 0 & + & (\omega_2 - \omega_1)B & = & 0 \end{array} \right. .$$
Mais $\omega_2 - \omega_1 \neq 0$, donc nécessairement $B = 0$, puis grâce à L_1, on en tire aussi $A = 0$.
On a donc nécessairement $A = B = 0$, d'où l'implication $\Rightarrow$.

Recherche des solutions réelles lorsque $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Sous cette hypothèse, $\Delta = b^2 - 4ac$ est un réel !

- 1er cas : $\Delta > 0$
Il y a deux racines réelles et distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Mais on est dans le cas $\Delta \neq 0$: les solutions y de (EH) sont de la forme $y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$, avec $(A,B) \in \mathbb{C}^2$.
Puisque λ_1 et λ_2 sont réels, il est clair que, pour avoir $y(x)$ réel pour tout x, il suffit d'avoir A et B constantes réelles ! Montrons que cela est nécessaire (i.e qu'il n'y a pas d'autres possibilités).
Rappel : soit z, un nombre complexe. On a la caractérisation des réels dans $\mathbb{C}$:

$$(z \text{ est réel}) \Leftrightarrow (\overline{z} = z) \Leftrightarrow (z - \overline{z} = 0).$$

Si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $y(x) \in \mathbb{R}$, alors $\overline{y(x)} = y(x)$ i.e $\overline{A}e^{\lambda_1 x} + \overline{B}e^{\lambda_2 x} = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$ (car $e^{\lambda_1 x}$ et $e^{\lambda_2 x}$ sont réels !).
On en tire $(\overline{A} - A)e^{\lambda_1 x} + (\overline{B} - B)e^{\lambda_2 x} = 0$, et ceci pour tout réel x, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
D'après le résultat préliminaire, ceci implique : $\overline{A} - A = 0$ et $\overline{B} - B = 0$, autrement dit : A et B sont des réels ! Q.E.D
<u>CONCLUSION</u> : lorsque $\boxed{\Delta > 0}$, les solutions réelles de (EH) sont exactement de la forme

$$\boxed{y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}, \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2}$$

où λ_1 et λ_2 sont les deux racines réelles distinctes de l'équation caractéristique.

- <u>$2^{\text{ème}}$ cas : $\Delta = 0$</u>

Il y a une <u>racine réelle</u> double $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Mais on est dans le cas $\Delta = 0$: les solutions y de (EH) sont de la forme $y(x) = Ae^{\lambda_0 x} + Bxe^{\lambda_0 x}$, avec $(A, B) \in \mathbb{C}^2$.
Puisque λ_0 est réel, il est clair que, pour avoir $y(x)$ réel pour tout x, il <u>suffit</u> d'avoir A et B constantes réelles ! Montrons que cela est nécessaire (i.e qu'il n'y a pas d'autres possibilités).
Si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $y(x) \in \mathbb{R}$, alors, en particulier, pour $x = 0$, on a $y(0) \in \mathbb{R}$, i.e $Ae^{\lambda_0 0} + B0e^{\lambda_0 0} = A$ réel ! On a déjà A réel.
Puis, avec $x = 1$, on a $y(1)$ réel, i.e $y(1) = Ae^{\lambda_0} + Be^{\lambda_0}$ est un réel. Or, A, λ_0 et donc e^{λ_0} sont réels, ce qui permet d'affirmer : B est aussi un réel.
On vient de prouver : pour avoir $y(x)$ réel pour tout x, il est nécessaire d'avoir A et B réels !
<u>CONCLUSION</u> : lorsque $\boxed{\Delta = 0}$, les solutions réelles de (EH) sont exactement de la forme

$$\boxed{y(x) = Ae^{\lambda_0 x} + Bxe^{\lambda_0 x}, \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2}$$

où λ_0 est la racine double réelle de l'équation caractéristique.

- <u>$3^{\text{ème}}$ cas : $\Delta < 0$</u>

Il y a deux <u>racines complexes non-réelles</u>, distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ET conjuguées : $\overline{\lambda_1} = \lambda_2$.
Mais on est dans le cas $\Delta \neq 0$: les solutions y de (EH) sont de la forme $y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$, avec $(A, B) \in \mathbb{C}^2$.
On a $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta$, avec α, β réels ET $\beta \neq 0$ (car racines non-réelles).
Avec ces notations, on peut ré-écrire

$$y(x) = Ae^{\alpha x}e^{i\beta x} + Be^{\alpha x}e^{-i\beta x}, \text{ ou encore } y(x) = e^{\alpha x}(Ae^{i\beta x} + Be^{-i\beta x}).$$

En passant au conjugué : $\overline{y(x)} = \overline{e^{\alpha x}(Ae^{i\beta x} + Be^{-i\beta x})} = e^{\alpha x}(\overline{A}e^{-i\beta x} + \overline{B}e^{+i\beta x})$.
Cette fois-ci, travaillons par équivalence :

$$\begin{aligned}(\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) \in \mathbb{R}) \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \overline{y(x)}) \\ &\Leftrightarrow \quad (\forall x \in \mathbb{R},\ e^{\alpha x}(Ae^{i\beta x} + Be^{-i\beta x}) = e^{\alpha x}(\overline{A}e^{-i\beta x} + \overline{B}e^{+i\beta x})\end{aligned}$$

Mais, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{\alpha x} \neq 0$, donc, en simplifiant et ré-ordonnant :

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) \in \mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in \mathbb{R},\ (A - \overline{B})e^{i\beta x} + (B - \overline{A})e^{-i\beta x} = 0)$$

Or, $i\beta \neq -i\beta$ (car $\beta \neq 0$), donc, d'après le résultat préliminaire, on a l'équivalence

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) \in \mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad (A - \overline{B} = B - \overline{A} = 0 \text{ i.e } A \text{ et } B \text{ sont des complexes conjugués})$$

«A et B conjugués» signifie qu'il existe des constantes réelles C_1 et C_2 telles que

$$A = C_1 + iC_2 \text{ et } B = \overline{A} = C_1 - iC_2.$$

Dans ce cas, $Ae^{i\beta x} + Be^{-i\beta x} = (C_1 + iC_2)e^{i\beta x} + (C_1 - iC_2)e^{-i\beta x} = C_1(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) + iC_2(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x})$
d'où $Ae^{i\beta x} + Be^{-i\beta x} = 2C_1\cos(\beta x) - 2C_2\sin(\beta x)$,
de la forme $Ae^{i\beta x} + Be^{-i\beta x} = C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x)$ avec C, D <u>constantes réelles</u>.
Autre présentation :

$Ae^{i\beta x} + Be^{-i\beta x} = Ae^{i\beta x} + \overline{Ae^{i\beta x}} = 2\text{Re}\left(Ae^{i\beta x}\right) = 2\text{Re}\left((C_1 + iC_2)(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\right)$, pour retrouver $Ae^{i\beta x} + Be^{-i\beta x} = 2\left(C_1\cos(\beta x) - C_2\sin(\beta x)\right) = C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x)$.
D'où $y(x) = e^{\alpha x}(C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x)) = Ce^{\alpha x}\cos(\beta x) + De^{\alpha x}\sin(\beta x)$.
On rappelle : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ e^{it} + e^{-it} = 2\cos(t) \text{ et } e^{it} - e^{-it} = 2i\sin(t)}$.

CONCLUSION : lorsque $\boxed{\Delta < 0}$, les solutions réelles de (EH) sont exactement de la forme

$$\boxed{y(x) = e^{\alpha x}\left(C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x)\right) = Ce^{\alpha x}\cos(\beta x) + De^{\alpha x}\sin(\beta x), \text{ avec } (C, D) \in \mathbb{R}^2}$$

où $\alpha \pm i\beta$ sont les racines complexes non-réelles de l'équation caractéristique.
Remarque : on sait (voir cours sur $\mathbb{C}$) qu'on peut transformer $a\cos(t) + b\sin(t)$ sous la forme $A\cos(t + \varphi)$, ou encore $A\sin(t + \psi)$ (rappel : $A = \sqrt{a^2 + b^2}$).
Donc, dans le cas $\Delta < 0$, les solutions peuvent aussi se mettre sous la forme

$$y(x) = e^{\alpha x}A_0\cos(\beta x + \varphi) = e^{\alpha x}A_0\sin(\beta x + \psi)$$

où $A_0 = \sqrt{C^2 + D^2}$.

STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS DANS LE CAS RÉEL

On remarquera que, dans le cas $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle (EH) est encore de la forme $\text{vect}_{\mathbb{R}}(y_1, y_2)$ (ensemble des combinaisons, à coefficients réels, des fonctions y_1 et y_2), avec

- si $\boxed{\Delta > 0}$: $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, et $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$, $\boxed{\text{racines réelles distinctes } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2}$:
$$\mathcal{S}_H = \left\{ y_h \ : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y_h(x) = Ay_1(x) + By_2(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} \end{array} \right. ,\quad (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
i.e $\boxed{\mathcal{S}_H = \{Ay_1 + By_2 \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\} \text{ où } y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \text{ et } y_2(x) = e^{\lambda_2 x}}$.
- si $\boxed{\Delta = 0}$: $y_1(x) = e^{\lambda_0 x}$, et $y_2(x) = xe^{\lambda_0 x}$, $\boxed{\text{racine réelle double } \lambda_0}$:
$$\mathcal{S}_H = \left\{ y_h \ : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y_h(x) = Ay_1(x) + By_2(x) = Ae^{\lambda_0 x} + Bxe^{\lambda_0 x} \end{array} \right. ,\quad (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
i.e $\boxed{\mathcal{S}_H = \{Ay_1 + By_2 \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\} \text{ où } y_1(x) = e^{\lambda_0 x} \text{ et } y_2(x) = xe^{\lambda_0 x}}$.
- $\boxed{\text{si } \Delta < 0}$: $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, et $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, $\boxed{\text{racines complexes non-réelles } \alpha \pm i\beta}$:
$$\mathcal{S}_H = \left\{ y_h \ : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y_h(x) = Ay_1(x) + By_2(x) = Ae^{\alpha x}\cos(\beta x) + Be^{\alpha x}\sin(\beta x) \end{array} \right. ,\quad (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
i.e $\boxed{\mathcal{S}_H = \{Ay_1 + By_2 \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\} \text{ où } y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x) \text{ et } y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)}$.

C'est encore un plan vectoriel (mais en tant qu'espace vectoriel «réel»... voir cours correspondant).

UN CAS A RETENIR : $\boxed{\text{« } y'' + cy = 0 \text{ » } (EH), \text{ avec } c \text{ réel}}$

- Si $c = 0$.
Les solutions réelles de l'équation $\boxed{\text{« } y'' = 0 \text{ »}}$ (EH) sont de la forme
$$\boxed{y(x) = Ax + B}, \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$
- Si $c > 0$: on pose $c = \omega^2$.
Les solutions réelles de l'équation $\boxed{\text{« } y'' + \omega^2 y = 0 \text{ »}}$ (EH) sont de la forme
$$\boxed{y(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) = C\cos(\omega x + \varphi)}, \quad \text{avec } (A, B, C, \varphi) \in \mathbb{R}^4.$$
En effet, (EC) $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ a deux racines non réelles : $\pm i\omega$ (cas $\Delta < 0$, $\alpha = 0$, $\beta = \omega$).
On a les relations $A = C\cos(\varphi)$ et $B = -C\sin(\varphi)$, $A^2 + B^2 = C^2$.

- Si $c < 0$: on pose $c = -\omega^2$.
  Les solutions réelles de l'équation $\boxed{\text{« } y'' - \omega^2 y = 0 \text{ »}}$ (EH) sont de la forme
  $$\boxed{y(x) = Ce^{\omega x} + De^{-\omega x} = A\text{ch}(\omega x) + B\text{sh}(\omega x)}, \quad \text{avec } (A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4.$$
  En effet, (EC) $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ a deux racines réelles : $\pm\omega$ (cas $\Delta > 0$).
  Avec $\boxed{e^t = \text{ch}(t) + \text{sh}(t)}$ et $\boxed{e^{-t} = \text{ch}(t) - \text{sh}(t)}$, on a les relations $C + D = A$ et $C - D = B$.

V - Problème de Cauchy

Théorème : l'EDL$_2$ «$ay'' + by' + cy = f(x)$» (E) avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ possède **une et une seule** solution vérifiant la condition initiale $\boxed{(CI) \left\{ \begin{array}{rcl} y(x_0) & = & \alpha_0 \\ y'(x_0) & = & \beta_0 \end{array} \right.}$

où $x_0 \in \mathbb{R}$, $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{C}^2$ sont des constantes FIXÉES.

Preuve : il y a deux cas à traiter, selon $\Delta = 0$ ou $\Delta \neq 0$.

- Si $\Delta \neq 0$: toute solution de (E) est de la forme $y(x) = y_p(x) + \boldsymbol{A}e^{\lambda_1 x} + \boldsymbol{B}e^{\lambda_2 x}$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, et y_p UNE solution particulière de (E). On veut prouver l'existence et l'unicité du couple de constantes $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ lorsque y vérifie la condititon initiale.
  Dans ce cas, $y'(x) = y_p'(x) + \boldsymbol{A}\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \boldsymbol{B}\lambda_2 e^{\lambda_2 x}$, et la condition (CI) peut s'écrire :
  $$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \boldsymbol{A}e^{\lambda_1 x_0} & + & \boldsymbol{B}e^{\lambda_2 x_0} & = & \alpha_0 - y_p(x_0) \\ \boldsymbol{A}\lambda_1 e^{\lambda_1 x_0} & + & \boldsymbol{B}\lambda_2 e^{\lambda_2 x_0} & = & \beta_0 - y_p'(x_0) \end{array} \right. .$$
  Par opération sur les lignes : $L_2 \leftarrow L_2 - \lambda_1 L_1$, on obtient le système équivalent
  $$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \boldsymbol{A}e^{\lambda_1 x_0} & + & \boldsymbol{B}e^{\lambda_2 x_0} & = & \alpha_0 - y_p(x_0) \\ 0 & + & \boldsymbol{B}(\lambda_2 - \lambda_1)e^{\lambda_2 x_0} & = & \beta_0 - y_p'(x_0) - \lambda_1(\alpha_0 - y_p(x_0)) \end{array} \right. .$$
  Sachant $(\lambda_2 - \lambda_1)e^{\lambda_2 x_0} \neq 0$, on en tire une valeur unique de $\boldsymbol{B}$, puis celle de $\boldsymbol{A}$ grâce à L_1.
- Si $\Delta = 0$: toute solution de (E) est de la forme $y(x) = y_p(x) + \boldsymbol{A}e^{\lambda_0 x} + \boldsymbol{B}xe^{\lambda_0 x}$ avec y_p UNE solution particulière de (E).
  Dans ce cas, $y'(x) = y_p'(x) + \boldsymbol{A}\lambda_0 e^{\lambda_1 x} + \boldsymbol{B}e^{\lambda_0 x} + \boldsymbol{B}\lambda_0 x e^{\lambda_0 x}$, et la condition (CI) peut s'écrire :
  $$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \boldsymbol{A}e^{\lambda_0 x_0} & + & \boldsymbol{B}x_0 e^{\lambda_0 x_0} & = & \alpha_0 - y_p(x_0) \\ \boldsymbol{A}\lambda_0 e^{\lambda_0 x_0} & + & \boldsymbol{B}(1 + \lambda_0 x_0)e^{\lambda_0 x_0} & = & \beta_0 - y_p'(x_0) \end{array} \right. .$$
  Par opération sur les lignes : $L_2 \leftarrow L_2 - \lambda_0 L_1$, on obtient le système équivalent
  $$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \boldsymbol{A}e^{\lambda_0 x_0} & + & \boldsymbol{B}x_0 e^{\lambda_0 x_0} & = & \alpha_0 - y_p(x_0) \\ 0 & + & \boldsymbol{B}e^{\lambda_0 x_0} & = & \beta_0 - y_p'(x_0) - \lambda_0(\alpha_0 - y_p(x_0)) \end{array} \right. .$$
  Sachant $e^{\lambda_0 x_0} \neq 0$, on en tire une valeur unique de $\boldsymbol{B}$, puis celle de $\boldsymbol{A}$ grâce à L_1.
- Dans les deux cas, la condition initiale fournit un unique couple $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ de constantes, donc une solution unique au problème de Cauchy (attention ici à la définition d'une *condition initiale*).

VI - Théorème de superposition

Théorème l'EDL$_2$ (E)

– si y_1 est UNE solution de l'équation (E_1) «$ay'' + by' + cy = f_1(x)$»

– si y_2 est UNE solution de l'équation (E_2) «$ay'' + by' + cy = f_2(x)$»

alors, si A_1 et A_2 sont des constantes (dans $\mathbb{C}$),

$y_3 = A_1 y_1 + A_2 y_2$ est UNE solution de l'équation (E_3) «$ay'' + by' + cy = A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x)$».

Preuve : c'est immédiat, car en posant $z = A_1y_1 + A_2y_2$, on a $z' = A_1y_1' + A_2y_2'$ et $z'' = A_1y_1'' + A_2y_2''$ puis $az'' + bz' + cz = a(A_1y_1'' + A_2y_2'') + b(A_1y_1' + A_2y_2') + c(A_1y_1 + A_2y_2)$, on développe et ordonne, d'où $az'' + bz' + cz = A_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + A_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) = A_1f_1 + A_2f_2$!
Donc z est bien une solution de l'équation (E_3).
Une autre façon de voir les choses : en définissant l'opérateur

$$T : y \mapsto T(y) = ay'' + by' + cy,$$

on a $T(A_1y_1 + A_2y_2) = A_1T(y_1) + A_2T(y_2)$ (**linéarité de l'opérateur** T, si A_1 et A_2 constantes).
Donc, si $T(y_1) = f_1$ et $T(y_2) = f_2$ alors $T(A_1y_1 + A_2y_2) = A_1f_1 + A_2f_2$
Intéret : on décompose le second membre de (E) en une somme de termes de manière à décomposer et simplifier les calculs dans la recherche d'une solution particulière.
Bien entendu, par récurrence simple, ce principe s'applique également pour une combinaison linéaire de n termes (avec $n \geqslant 2$).

VII - Recherche d'une solution particulière de «$ay'' + by' + cy = f(x)$» (E)

Parfois, une solution particulière est évidente. Par exemple, $ay'' + by' + cy = d$, avec d=constante : si $c \neq 0$, peut prendre $y_p(x) = \dfrac{d}{c}$ (fonction constante : $y_p' = y_p'' = 0$). Voir résumé pour d'autres cas.
Parfois, la forme d'une solution particulière est suggérée (voir feuille d'exercices).
En spé, on verra une méthode générale pour trouver les solutions d'EDL$_2$, même à coefficients non constants (sous certaines conditions).

On va établir une méthode (à connaître) permettant de trouver une solution particulière lorsque le second membre est de la forme

$$\boxed{f(x) = P(x)e^{mx}}$$

où P est un **polynôme** (à coefficients réels ou complexes) ET m une **constante** (réelle ou complexe).
La méthode est simple : on cherche une solution particulière sous la forme

$$\boxed{y_p(x) = Q(x)e^{mx}}, \text{ où } Q \text{ est un polynôme à trouver.}$$

Voilà....on vérifie dans chaque exemple que c'est possible d'en trouver une sous cette forme....
Soyons plus rigoureux ! On peut montrer que la méthode fonctionne bien dans tous les cas, et même trouver des renseignements précieux sur le polynôme Q à déterminer (attention : ce qui suit est donné à titre culturel).
En effet, posons $y_p(x) = Q(x)e^{mx}$, que l'on notera abusivement (par commodité) : $y_p = Q.e^{mx}$.
En dérivant deux fois, on obtient :
$y_p' = (Q' + m.Q)e^{mx}$ et $y_p'' = (Q'' + 2m.Q' + m^2.Q)e^{mx}$.
y_p est solution de (E) signifie (on reporte) : $ay_p'' + by_p' + cy_p = P(x)e^{mx}$), i.e, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$a(Q'' + 2m.Q' + m^2.Q)e^{mx} + b(Q' + m.Q)e^{mx} + cQ.e^{mx} = P(x)e^{mx}$. On factorise, et on simplifie par $e^{mx} \neq 0$.
$a(Q'' + 2m.Q' + m^2.Q) + b(Q' + m.Q) + cQ = P(x)$: on ré-ordonne.

$$aQ''(x) + (2am + b)Q'(x) + (am^2 + bm + c)Q(x) = P(x) \qquad (*)$$

C'est une égalité entre deux polynômes : $P(x)$ est connu, a, b, c, m aussi, on cherche $Q(x)$.
Il y a trois cas possibles :

- Si $am^2 + bm + c \neq 0$: i.e m n'est pas racine de l'équation caractéristique (EC).
  En examinant les degrés des polynômes à gauche et à droite de l'égalité $(*)$, et en rappelant que $\deg(Q'') < \deg(Q') < \deg(Q)$, c'est Q qui impose son degré (à gauche), donc nécessairement

$\deg(Q) = \deg(P)$: Q a le même degré que P, on peut donc avancer une forme générale pour $y_p(x) = Q(x)e^{mx}$ qu'il ne reste plus qu'à reporter pour en déterminer UN exemplaire (on rappelle qu'à ce stade, on cherche juste UNE solution particulière de (E), pas toutes !).

- Si $am^2 + bm + c = 0$ ET $2am + b \neq 0$: i.e m est racine simple de l'équation caractéristique (EC) (plus précisément, sous cette hypothèse, (EC) a nécessairement deux racines distinctes, $\Delta \neq 0$, et m est l'une d'entre elles).
  Dans ce cas, $(*)$ devient $aQ''(x) + (2am + b)Q'(x) = P(x)$: un raisonnement similaire au précédent donne $\deg(Q') = \deg(P)$, autrement dit $\deg(Q) = \deg(P) + 1$. On conclut de même.
- Si $am^2 + bm + c = 0$ ET $2am + b = 0$: i.e m est racine double de l'équation caractéristique (EC) (plus précisément, sous cette hypothèse, $\Delta = 0$ car (EC) a nécessairement une racine double, qui est $m = -\frac{b}{2a}$!).
  Dans ce cas, $(*)$ devient $aQ''(x) = P(x)$: un raisonnement similaire aux précédents donne $\deg(Q'') = \deg(P)$, car $a \neq 0$, autrement dit $\deg(Q) = \deg(P) + 2$. On conclut de même.

Résumé : pour trouver une solution particulière de $ay_p'' + by_p' + cy_p = P(x)e^{mx}$, on cherche une solution sous la forme $y_p(x) = Q(x).e^{mx}$, où le polynôme Q, qui est à déterminer, vérifie

$$\deg(Q) = \begin{cases} \deg(P) & \text{si} \quad m \text{ n'est pas racine de } (EC)\ a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \\ \deg(P) + 1 & \text{si} \quad m \text{ est une racine simple de } (EC)\ a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \\ \deg(P) + 2 & \text{si} \quad m \text{ est une racine double de } (EC)\ a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \end{cases}$$

Résultat résumé par : $\boxed{\deg(Q) = \deg(P) + \text{ ordre de multiplicité de } m \text{ comme racine de } (EC)}$.

Remarque : dans le cas $f(x) = P(x)e^{mx}$ se cachent des **cas particuliers**.

- $\boxed{\text{Si } f(x) = P(x)}$, un polynôme (cas où $m = 0$).
  On cherche y_p sous la forme $y_p(x) = Q(x)$ (un polynôme) !
- $\boxed{\text{Si } f(x) = e^{mx}}$ (cas où $P(x) = 1$, polynôme constant non nul, donc de degré nul).
  On cherche $y_p(x) = Q(x)e^{mx}$, où Q, polynôme, sera de degré 0, ou 1 ou 2 en fonction de m !
  Mieux :
  – si m pas racine de (E) : on peut chercher y_p sous la forme $y_p(x) = Ce^{mx}$ (C constante).
  – si m racine simple de (E) : on peut chercher y_p sous la forme $y_p(x) = Cxe^{mx}$ (C constante).
  – si m racine double de (E) : on peut chercher y_p sous la forme $y_p(x) = Cx^2e^{mx}$ (C constante).
- $\boxed{\text{Si } f(x) = \cos(\omega x)}$ (ou $\boxed{f(x) = \sin(\omega x)}$), avec a, b, c réels.
  En effet, $\cos(\omega x) = \text{Re}(e^{i\omega x}) = \text{Re}(e^{mx})$ en posant $m = i\omega$ (et $\sin(\omega x) = \text{Im}(e^{i\omega x}) = \text{Im}(e^{mx})$).
  On cherche une solution particulière (complexe) z_p de $az'' + bz' + cz = e^{i\omega x}$.
  Puis $y_p(x) = \text{Re}(z_p(x))$ sera une solution particulière de $ay'' + by' + cy = \cos(\omega x)$
  De même : $\text{Im}(z_p(x))$ une solution particulière de $ay'' + by' + cy = \sin(\omega x)$!
  Ces résultats découlent du principe de superposition, en séparant les parties réelles et imaginaires.
  De manière générale, pour des seconds membres de ce type ($f(x) = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$), on trouve une solution particulière de la forme $y_p(x) = Q_1(x)\cos(\omega x) + Q_2(x)\sin(\omega x)$ où Q_1, Q_2 sont des polynômes constants (si le second membre n'est pas solution de (EH)), ou de degré 1 (si le second membre est solution de (EH)).
  Avec la même méthode, on peut trouver $y_p(x)$ lorsque $f(x) = e^{\mu x}\cos(\omega x)P(x) = \text{Re}(e^{(\mu+i\omega)x}P(x))$ (voir cours).