Structure de l'ensemble des solutions

- Si l'équation est donnée sous la forme (E) « $\alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) = \gamma(x)$ », où α, β et γ sont des fonctions définies et continues sur une partie $D \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on commence par chercher un **intervalle** $I \subset \mathbb{R}$ sur lequel la fonction α ne s'annule pas ($\forall x \in I$, $\alpha(x) \neq 0$), on ré-écrit l'équation (E) sous la forme (E) « $y'(x) + \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}y(x) = \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}$ ».
  On raisonne donc maintenant sur l'équation
  $$(E) \text{ « } \boxed{y'(x) + a(x)y(x) = b(x)} \text{ »}$$
  où a et b désignent des fonctions **continues** sur l'**intervalle** $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}, \mathbb{C}$).
- Résolution de l'**équation homogène associée** : (EH) « $\boxed{y'(x) + a(x)y(x) = 0}$ ».
  On cherche d'abord une primitive de la fonction a sur l'intervalle I : $A(x) = \displaystyle\int a(x)\mathrm{d}x$.
  Alors, la fonction $y_0 : x \mapsto y_0(x) = e^{-A(x)} = e^{-\int a(x)\mathrm{d}x}$ est **une** solution de l'équation homogène (EH) : « $y'(x) = -a(x)y(x)$ ».
  Les solutions de (EH) sont les fonctions y_h de la forme $y_h = ky_0$, avec k constante dans $\mathbb{K}$:
  $$y_h : \left| \begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & y_h(x) = ky_0(x) = ke^{-A(x)} = ke^{-\int a(x)\mathrm{d}x} \end{array} \right. .$$
- On cherche **une solution particulière** de l'équation (E), que l'on notera y_p.
  Les solutions de (E) sont alors les fonctions y de la forme $\boxed{y = y_p(x) + ky_0(x)}$, avec k constante dans $\mathbb{K}$:
  $$y : \left| \begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & y(x) = y_p(x) + ky_0(x) = y_p(x) + ke^{-A(x)} = \boxed{y_p(x) + ke^{-\int a(x)\mathrm{d}x}} \end{array} \right. .$$
- Si une solution particulière n'est pas évidente ou suggérée, on peut en chercher une sous la forme $\boxed{y_p(x) = C(x)y_0(x) = C(x)e^{-A(x)} = C(x)e^{-\int a(x)\mathrm{d}x}}$, où $C : x \mapsto C(x)$ est une **fonction** dérivable à déterminer pour que y_p soit solution de (E) (*méthode de la variation de la constante*).
  On reporte cette expression dans (E), le problème se ramène à trouver **une** fonction C vérifiant, sur I, $\boxed{C\,'(x) = \dfrac{b(x)}{y_0(x)}}$ (donc au calcul d'**une** primitive, sur I, de $x \mapsto \frac{b(x)}{y_0(x)} = b(x)e^{+\int a(x)\mathrm{d}x}$).

Principe de superposition

- $\boxed{\text{si}}$ y_1 est une solution particulière de l'équation (E_1) « $y'(x) + a(x)y(x) = b_1(x)$ »,
- $\boxed{\text{si}}$ y_2 est une solution particulière de l'équation (E_2) « $y'(x) + a(x)y(x) = b_2(x)$ »,
- $\boxed{\text{si}}$ λ_1 et λ_2 sont des **constantes**, $\boxed{\text{alors}}$
- $y_p = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est <u>une</u> solution particulière de l'équation différentielle
  $$(E) \text{ « } y'(x) + a(x)y(x) = \lambda_1 b_1(x) + \lambda_2 b_2(x) \text{ ».}$$

Autrement dit, l'opérateur $T : y \mapsto T(y) = y' + ay$ est **linéaire** :
$$T(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 T(y_1) + \lambda_2 T(y_2).$$

Problème de Cauchy où $a, b : I \to \mathbb{K}$, fonctions continues.

L'équation différentielle (E) « $\boxed{y'(x) + a(x)y(x) = b(x)}$ » possède **une et une seule solution** y vérifiant la **condition initiale** $y(x_0) = Y_0$, où $x_0 \in I$ et $Y_0 \in \mathbb{K}$ sont des constantes fixées.