Equation homogène

Exercice 1 *On considère l'équation différentielle* $(E) : y' + (2+x)\,y = \mathrm{ch}\,(x) + 2$. *Montrer que la tangente en* $x = -2$ *à toute solution de* (E) *est parallèle à une droite fixe.*

Exercice 2 *Résoudre les équations différentielles suivantes. On précisera l'intervalle sur lequel on travaille. Attention, la variable est, selon le cas, soit* x, *soit* t.

① $y' + ty = 0$ ② $y' - \sin(t)\,y = 0$ ③ $y' + \dfrac{3}{x^2+5x+4}y = 0$
④ $\mathrm{ch}\,(x)\,y' + \mathrm{sh}\,(x)\,y = 0$ ⑤ $\left(1+x^2\right)y' - \arctan(x)\,y = 0$ ⑥ $\left(1+x^2\right)y' + 2xy = 0$

Exercice 3 *Résoudre les problèmes de Cauchy :*

① $\left\{\begin{array}{c}(1+e^x)\,y' + e^x y = 0\\ y(\ln(2)) = 3\end{array}\right.$ ② $\left\{\begin{array}{c}\mathrm{ch}^2(x)\,y' + \mathrm{sh}\,(x)\,y = 0\\ y(\ln(3)) = \sqrt{e}\end{array}\right.$ ③ $\left\{\begin{array}{c}y' + \arctan(x)\,y = 0\\ y(1) = 2\end{array}\right.$

Exercice 4 *On considère l'équation différentielle* $(E) : y' + \dfrac{x^2}{\mathrm{ch}\,x}y = 0$. *Soit* y *une solution de* (E), *montrer que* y *est monotone sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 5 *Résoudre l'équation différentielle* $(1+|x|)\,y' + xy = 0$.

Equation avec second membre

Exercice 6 *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

① $y' + 2y = x + 1$ ② $y' - 3y = x^3$ ③ $y' - y = \sin(x)$ ④ $y' - y = 2\,\mathrm{ch}\,(x)$
⑤ $y' + 2y = 1 + \cos(x)$ ⑥ $y' + y = x\sin(x)$ ⑦ $\left(1+x^2\right)y' + y = 2$ ⑧ $y' + e^x y = 2e^x$

Exercice 7 *Résoudre les équations différentielles suivantes , on précisera sur quel intervalle on se place.*

① $y' + 2ty = e^{2t-t^2}$ ② $(1+t^2)y' + ty = 1 + 2t^2$ ③ $\left(1-x^2\right)y' - xy = 1$ *sur* $]-1,1[$
④ $\mathrm{ch}\,(t)\,y' + \mathrm{sh}\,(t)\,y = \dfrac{1}{1+t^2}$ ⑤ $(e^x+1)\,y' + e^x y = \mathrm{ch}\,x$ ⑥ $y' + \tan(x)\,y = \cos^2(x)$ *sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
⑦ $y' - (t+1)(y+1) = 0$ ⑧ $\left(1+x^2\right)y' + 2xy = e^x + x$ ⑨ $xy' + 3y = \dfrac{1}{1-x^2}$

Exercice 8 *Pour chaque équation différentielle, chercher une solution particulière* y_p *sous la forme indiquée, puis résoudre.*

① $\left(x^2+1\right)y' + (x+1)\,y = 6x^3 - 4$, $y_p(x) = ax^2 + bx + c$ ② $(e^x+1)\,y' + (1-e^x) = -2$, $y_p(x) = e^{\alpha x}$ *où* $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 9 *On considère le problème de Cauchy* (E) : $\left\{\begin{array}{c}\left(1+x^2\right)y' + xy = \sqrt{1+x^2}\\ y(1) = 0\end{array}\right.$.

1. *Résoudre* (E), *on notera* y_1 *la solution obtenue.*
2. *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,(y_1(x) - 1)$.
3. *Calculer* $\mathrm{sh}\,(\ln 2)$ *puis* $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}} y_1(x)\,dx$.

Exercice 10 *Soit l'équation différentielle* $(E) : (e^x+1)\,y' - y = \dfrac{e^x}{1+x^2}$

1. *Résoudre* (E).
2. *Donner la solution* f *telle que* $f(0) = -\dfrac{\pi}{4}$. *Simplifier l'expression de* f *pour* $x > 0$.
3. *Quelle est la limite de* $xf(x)$ *quand* x *tend vers* $+\infty$?

Exercice 11 [2] *On considère l'équation différentielle*

$$\mathrm{ch}\,(x)\,y' + \mathrm{sh}\,(x)\,y = 1 + (2x+1)\,e^{2x} \tag{E}$$

1. *Résoudre l'équation homogène sur* $\mathbb{R}$.
2. *A l'aide de la variation de la constante, trouver une solution particulière de* (E)
3. *Vérifier que* $y_p(x) = 2xe^x$ *est une solution particulière de* (E).
4. *Déterminer la solution de* (E) *telle que* $y(\ln 2) = 0$.

Exercice 12 *On considère l'équation différentielle*

$$(1+x^2)y' + xy = \sqrt{1+x^2} \qquad (E).$$

1. *Déterminer la solution* $f_m : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ *de cette équation* (E) *telle que* $f_m(1) = \sqrt{2}m$.
2. *Ecrire une équation de la tangente* T_m *au point* A, *de coordonnées* $(1, \sqrt{2}m)$, *sur la courbe* Γ_m *représentative de* f_m.
3. *Prouver que, lorsque* m *parcourt* $\mathbb{R}$, *toutes ces tangentes* T_m *sont concourantes en un point dont on précisera les coordonnées.*

Problème de raccord

Exercice 13 *L'équation différentielle* $\mathrm{sh}\,(x)\,y' + xy = 1$ *admet-elle des solutions sur* $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 14 *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle* $xy' + (2x+1)\,y = e^{-x}$.

Exercice 15 *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle* $(2+x)\,y' + y = 2$.

Exercice 16 *Déterminer les solutions sur* $]0, +\infty[$ *de* $\ln(x)\,y' + \dfrac{y}{x} = 1$.

Problèmes liés

Exercice 17 *Soit* f *définie et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{C}$ *telle que* $\forall (t,u) \in \mathbb{R}^2,\ f(t+u) = f(t)\,f(u)$. *Déterminer* f.

Exercice 18 *Trouver toutes les applications* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *continues telles que* $\forall x \in \mathbb{R},\ 2xf(x) = 3\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

Exercice 19 *Trouver toutes les applications* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *continues telles que* $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(1+x^2\right) f(x) = x\left(1 + \displaystyle\int_1^x f(t)dt\right)$.

Exercice 20 *On considère l'équation différentielle* $(E) : 2xy' + y = x$ *sur* $I =]0, +\infty[$. *Quel est le lieu* $\mathcal{H}$ *des points en lesquels la tangente à une courbe intégrale est horizontale ?*

Exercice 21 *On considère l'équation différentielle* $(E) : y' + 2xy = 1$. *On ne cherchera pas à la résoudre.*

1. *Soit* f *une solution de* (E), *montrer que la fonction* $g : x \longmapsto -f(-x)$ *est aussi solution de* (E).
2. *En déduire que* (E) *admet une unique solution impaire.*

Exercice 22 *On considère l'équation différentielle* $(E) : x^2y' - xy + y^2 = 0$ *sur* $I =]1, +\infty[$.

1. *On suppose que* y *ne s'annule pas sur* I *et on pose alors* $y(x) = \dfrac{1}{z(x)}$. *Déterminer une équation différentielle* (E_z) *vérifiée par* z.
2. *Résoudre* (E_z). *Comment faut-il choisir la constante pour que* $\forall x \in I,\ z(x) \neq 0$ *?*
3. *Déterminer les solutions de* (E) *sur* I.