PRÉLIMINAIRES - RAPPELS

Fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes (dans $\mathbb{C}$)

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & f(t) = x(t) + iy(t) \end{array} \right.$, une fonction à valeurs complexes,
où $x(t) = \mathrm{Re}(f(t))$ et $y(t) = \mathrm{Im}(f(t))$.
Si $z_0 = \alpha + i\beta$ (α, β réels), on donne la définition suivante de **limite** pour une telle fonction f :

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = z_0 \quad \text{SI} \quad \lim_{t \to t_0} |f(t) - z_0| = 0.$$

On vérifie facilement que cela est équivalent à :

$$\left[\lim_{t \to t_0} (x(t) + iy(t)) = \alpha + i\beta \right] \quad \text{SSI} \quad \left[\lim_{t \to t_0} x(t) = \alpha \textbf{ et } \lim_{t \to t_0} y(t) = \beta \right].$$

Puis, en donnant comme définition pour la **continuité** :

$$f \text{ est continue en } t_0 \quad \text{SI} \quad \lim_{t \to t_0} f(t) = f(t_0)$$

on en déduit aisément

$$[\ f \text{ est continue en } t_0\ ] \quad \text{SSI} \quad [\ x \text{ et } y \text{ sont continues en } t_0\ ].$$

De même, on définit la notion de **dérivabilité** et de dérivée de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$f \text{ est dérivable en } t_0 \quad \text{SI} \quad \lim_{t \to t_0} \left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \right) \text{ existe (et appartient à } \mathbb{C}\text{)},$$

et dans ce cas on note $f'(t_0) = \displaystyle\lim_{t \to t_0} \left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \right)$ (d'où le fonction dérivée f').
On en déduit trivialement :

$$[\ f = x + iy \text{ est dérivable en } t_0\ ] \quad \text{SSI} \quad [\ x \text{ et } y \text{ sont dérivables en } t_0\ ]$$

et, dans ce cas, $f'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$.
On retrouve alors les formules usuelles sur la dérivation de somme/produit/quotient de fonctions dérivables (mais pas composition car ici cela n'a pas de sens !). On étend également les notions de dérivées successives, de classe C^n, classe C^∞.
Si $z : \left| \begin{array}{ccc} I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & z(t) = x(t) + iy(t) \end{array} \right.$ est une fonction continue sur l'intervalle I (i.e x et y le sont),
alors on a, pour $(a, b) \in I^2$: $\displaystyle\int_a^b z(t)\mathrm{d}t = \int_a^b (x(t) + iy(t))\mathrm{d}t = \int_a^b x(t)\mathrm{d}t + i \int_a^b y(t)\mathrm{d}t.$

Un exemple

Soit $a = \alpha + i\beta$, $a \in \mathbb{C}$, un nombre complexe (**une constante**) et la fonction

$$f_a : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & f_a(t) = e^{at} = e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{\beta i t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) \end{array} \right. .$$

La fonction f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_a' = a f_a$, autrement dit : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \dfrac{\mathrm{d}\left(e^{at}\right)}{\mathrm{d}t} = a e^{at}}$.
La preuve est facile, on dérive par rapport à t en séparant parties réelle/imaginaire :
$f_a'(t) = \dfrac{\mathrm{d}\left(e^{\alpha t} \cos(\beta t) + i e^{\alpha t} \sin(\beta t)\right)}{\mathrm{d}t} = \alpha e^{\alpha t} \cos(\beta t) - \beta e^{\alpha t} \sin(\beta t) + i \alpha e^{\alpha t} \sin(\beta t) + i \beta e^{\alpha t} \cos(\beta t)$, d'où
$f_a'(t) = e^{\alpha t} \left[\alpha \cos(\beta t) - \beta \sin(\beta t) + i \alpha \sin(\beta t) + i \beta \cos(\beta t)\right]$, d'où
$f_a'(t) = e^{\alpha t} \left[\cos(\beta t)(\alpha + i\beta) + i(\alpha + i\beta) \sin(\beta t)\right] = e^{\alpha t} \left[\alpha + i\beta\right] \left[\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)\right] = e^{\alpha t} a e^{i\beta t}$, d'où

$f_a'(t) = ae^{(\alpha t + i\beta t)} = ae^{(\alpha+i\beta)t} = ae^{at} = af_a(t)$. OK !
Remarque : on pouvait également utiliser le résultat déjà établi dans le cours sur les fonctions usuelles,

$$\frac{\mathrm{d}\left(e^{\varphi(t)}\right)}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)e^{\varphi(t)}$$

si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction à valeurs complexes et dérivable (en prenant $\varphi(t) = at$ puis $\varphi'(t) = a$).

Une équation fonctionnelle

Prop : la fonction f_a est l'**unique solution** y du problème suivant : $(\mathcal{P})\begin{cases} y : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ est dérivable} \\ y' = ay, \text{ où } a \text{ constante} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

où $f_a(t) = e^{at}$.
Preuve : il y a deux choses à prouver.

- Tout d'abord que f_a est bien une solution du problème, ce qui est évident, car f_a est bien dérivable, puis on a montré précédemment que $f_a' = af_a$, et enfin $f_a(0) = e^{a0} = e^0 = 1$.
- Puis, il faut justifier que f_a est bien la seule solution de ce problème.
  Pour cela, considérons g, une solution quelconque du problème $(\mathcal{P})$.
  On définit alors la fonction φ par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = g(t)e^{-at}$.
  Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme produit de fonctions dérivables), et
  $\forall t \in \mathbb{R} : \varphi'(t) = g'(t)e^{-at} - ag(t)e^{-at} = (g'(t) - ag(t)) \times e^{-at} = 0 \times e^{-at} = 0$ (car g vérifie $(\mathcal{P})$).
  Ainsi, φ est une fonction constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, avec $\varphi(0) = g(0)e^{-a\times 0} = 1 \times 1 = 1$ (car g vérifie $(\mathcal{P})$). Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t)e^{-at} = 1$ (i.e) $g(t) = e^{at}$ (i.e) $g = f_a$.
  D'où l'unicité de la solution de $(\mathcal{P})$.

INTRODUCTION

But : on désire résoudre des équations différentielles du 1$^{\text{er}}$ ordre, problème que l'on rencontre souvent dans la pratique. Il s'agit de trouver des fonctions dérivables $y : D \to \mathbb{K}$, où D est une partie de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant, pour tout $x \in D$, une égalité du type $y'(x) = \varphi(x, y(x))$.
Par exemple $y'(x) = 1 + y^2(x)$, ou $y'(x) = \dfrac{\sin(y(x))}{y(x) + x^2}$, ou $y'(x) = 3\cos(x)y(x) - \sin(2x)$, etc...
Dans ce chapitre, on va uniquement étudier un cas particulier, celui des équations différentielles **linéaires** du 1$^{\text{er}}$ ordre : elles sont de la forme

$$y'(x) = \alpha(x)y(x) + \beta(x) \text{ i.e } y' = \alpha y + \beta,$$

où α et β sont des fonctions connues (et continues).
Attention : il s'agit ici d'une base de cours, tous les exemples d'illustration seront traités en classe.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU 1$^{\text{er}}$ ORDRE

I - Définition

On appelle **équation différentielle linéaire du 1$^{\text{er}}$ ordre** (noté, entre nous, EDL$_1$) toute équation de la forme

$$« \ a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x) \ » \ (E)$$

où a, b, $c : D \to \mathbb{K}$ sont des fonctions continues sur le domaine réel D, à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Résoudre (ou intégrer) l'équation signifie trouver toutes les fonctions $y : D \to \mathbb{K}$, dérivables, et qui vérifient l'égalité (E) sur D.

II - Équation normalisée

On cherche un intervalle I sur lequel la fonction a ne s'annule pas : $\boxed{\forall x \in I,\ a(x) \neq 0}$.
On peut alors ré-écrire l'équation (E) sous la forme

$$« \ y'(x) + \frac{b(x)}{a(x)}y(x) = \frac{c(x)}{a(x)} \ » \qquad (E)$$

On considère désormais cette équation, qui est donc de la forme

$$\boxed{« \ y'(x) + \alpha(x)y(x) = \beta(x) \ » \qquad (E)},$$

avec α, $\beta : I \to \mathbb{K}$, **fonctions continues** sur l'**intervalle** $I \subset \mathbb{R}$.

On lui associe l'équation

$$\boxed{« \ y'(x) + \alpha(x)y(x) = 0 \ » \qquad (EH)}$$

appelée équation différentielle linéaire **homogène** du 1$^{\text{er}}$ ordre associée à l'équation (E).

III - Structure des ensembles de solutions

On note :
$\mathcal{S}$ = l'ensemble des solutions $y : I \to \mathbb{K}$ de l'équation (E) : « $y'(x) + \alpha(x)y(x) = \beta(x)$ »

et

$\mathcal{S}_H$ = l'ensemble des solutions $y : I \to \mathbb{K}$ de l'équation (EH) : « $y'(x) + \alpha(x)y(x) = 0$ »

Prop1 : $\boxed{\text{l'ensemble } \mathcal{S}_H \text{ est stable par combinaison linéaire.}}$ Autrement dit :

$$\boxed{(\ (f,g) \in \mathcal{S}_H^2 \text{ et } (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2\ ) \Rightarrow (\ \lambda f + \mu g \in \mathcal{S}_H\ )}.$$

Autrement dit, si f et g appartiennent à $\mathcal{S}_H$, alors, pour tous λ, μ dans $\mathbb{K}$ (constante), $\lambda f + \mu g$ est aussi dans $\mathcal{S}_H$. En effet, posons $h = \lambda f + \mu g$: alors $h' = \lambda f' + \mu g'$, puis
$h' + \alpha h = \lambda f' + \mu g' + \alpha(\lambda f + \mu g) = \lambda(f' + \alpha f) + \mu(g' + \alpha g) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0 + 0 = 0$
car f, $g \in \mathcal{S}_H$ donc vérifient l'équation (EH). Ainsi $h' + \alpha h = 0$, donc h appartient à $\mathcal{S}_H$.
Remarque : il est évident que, $\tilde{0}$, la fonction nulle sur I, appartient à $\mathcal{S}_H$. Avec la stabilité par combinaison linéaire, on verra plus tard que cela implique que $\mathcal{S}_H$ a une structure d'*espace vectoriel*.

Prop2 : $\boxed{\text{la différence de deux éléments de } \mathcal{S} \text{ appartient à } \mathcal{S}_H.}$ Autrement dit :

$$\boxed{(\ (y_1,y_2) \in \mathcal{S}^2\ ) \Rightarrow (\ y_1 - y_2 \in \mathcal{S}_H\ )}.$$

En effet : si les fonctions y_1 et y_2 sont dans $\mathcal{S}$, alors elles vérifient (E) toutes les deux. On a, sur I : $y_1' + \alpha y_1 = \beta$ et $y_2' + \alpha y_2 = \beta$, d'où, par soustraction des égalités : $y_1' - y_2' + \alpha y_1 - \alpha y_2 = \beta - \beta$, soit

$(y_1 - y_2)' + \alpha(y_1 - y_2) = 0$, donc $(y_1 - y_2)$ est solution de (EH), donc $(y_1 - y_2) \in \mathcal{S}_H$. Conséquence :

Prop3 : $\boxed{\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_H}$, où y_p est un élément quelconque de $\mathcal{S}$.

Attention : l'écriture $\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_H$ n'a, *a priori*, pas de sens (somme d'une fonction et d'un ensemble ?) ! Elle signifie juste que les éléments de $\mathcal{S}$ se décrivent sous la forme $y = y_p + y_h$, où y_p est un élément de $\mathcal{S}$ (fixé), et y_h décrit l'ensemble $\mathcal{S}_H$.

Preuve : supposons connue y_p, une solution de (E) (donc $y_p \in \mathcal{S}$). Pour tout autre élément $y \in \mathcal{S}$, on a vu que $y - y_p$ appartient à $\mathcal{S}_H$, donc il existe $y_h \in \mathcal{S}_H$ tel que $y - y_p = y_h$ (i.e) $y = y_p + y_h$ (i.e) $y \in (y_p + \mathcal{S}_H)$. On vient de prouver l'inclusion d'ensemble : $\mathcal{S} \subset (y_p + \mathcal{S}_H)$.

Réciproquement, si y s'écrit $y = y_p + y_h$ avec $y_h \in \mathcal{S}_H$, alors

$y' + \alpha y = y_p' + y_h' + \alpha(y_p + y_h) = (y_p' + \alpha y_p) + (y_h' + \alpha y_h) = \beta + 0 = \beta$, donc y appartient à $\mathcal{S}$.

Ceci prouve l'inclusion inverse $(y_p + \mathcal{S}_H) \subset \mathcal{S}$.

Ce qu'il faut retenir : **pour décrire toutes les solutions de (E), il suffit de connaître UNE solution particulière y_p de (E), et de lui ajouter TOUTES les solutions de l'équation homogène associée (EH).**

IV - Description de $\mathcal{S}_H$

On cherche toutes les solutions, sur $\boxed{\text{l'intervalle } I}$, de l'équation homogène (normalisée)

$$(EH) \text{ « } y'(x) + \alpha(x)y(x) = 0 \text{ ».}$$

On rappelle que $\alpha : I \to \mathbb{K}$ est une fonction **continue** sur l'intervalle I, on sait donc qu'elle admet des primitives sur I. Notons A **une primitive** de α sur I : $\forall x \in I$, $A(x) = \displaystyle\int \alpha(x)\mathrm{d}x$.

Par définition, A est une fonction dérivable (et même de classe C^1 sur I), et $A'(x) = \alpha(x)$.

Définissons la fonction y_0 par : $y_0(x) = e^{-A(x)}$.

On vérifie aisément que y_0 est dérivable (par composition, car A et exp le sont) et que $\forall x \in I$:

$y_0'(x) = -A'(x)e^{-A(x)}$, (i.e) $y_0'(x) = -\alpha(x)e^{-A(x)} = -\alpha(x)y_0(x)$, donc $y_0'(x) + \alpha(x)y_0(x) = 0$.

La fonction $y_0 = e^{-A}$ est donc **une** solution de (EH) : on connait donc au moins un élément (non constamment nul) de $\mathcal{S}_H$: y_0. Or, on a vu que $\mathcal{S}_H$ est stable par combinaison linéaire, on connait donc plein d'autres éléments de $\mathcal{S}_H$, toutes les fonctions de la forme $\lambda \times y_0$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (constante).

La question est : y en a t'il d'autres ? La réponse est non, mais il faut le prouver !

Soit z, un élement de $\mathcal{S}_H$: posons alors $w = z \times e^A$ (i.e) pour tout $x \in I$, $w(x) = z(x) \times e^{A(x)}$.

Clairement, w est dérivable (car z et A le sont) et $w' = z' \times e^A + z \times A'e^A = (z' + z \times A')e^A$.

Mais $A' = \alpha$, d'où $w' = (z' + \alpha z)e^A = 0 \times e^A = 0$ car $z \in \mathcal{S}_H$ (donc $z' + \alpha z = 0$). Ainsi, $w' = 0$ donc w est constante sur l'*intervalle* I : il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $x \in I$, $w(x) = \mu$ (i.e) $z(x) \times e^{A(x)} = \mu$ (i.e) $z(x) = \mu e^{-A(x)}$ (i.e) $z(x) = \mu y_0(x)$!

On vient de prouver que tout élément z de $\mathcal{S}_H$ est nécessairement de la forme $\mu \times y_0$ avec μ constante dans $\mathbb{K}$.

On conclut :

l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'EDL homogène

$$(EH) \text{ « } y'(x) + \alpha(x)y(x) = 0 \text{ » } \textbf{sur l'intervalle } I$$

est l'ensemble des fonctions de la forme

$$y_h : x \mapsto y_h(x) = k.e^{-A(x)}$$

où $A : x \mapsto A(x) = \int \alpha(x)\mathrm{d}x$ désigne une primitive de α sur l'intervalle I,
et k une constante décrivant $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Ainsi $\mathcal{S}_H = \{k.y_0 \mid k \in \mathbb{K}\}$: c'est l'ensemble des fonctions colinéaires à la fonction $y_0 = e^{-\int \alpha}$.
On note : $\mathcal{S}_H = \text{vect}(y_0)$ (**droite vectorielle engendrée par y_0**), ou encore

$$\mathcal{S}_H = \text{vect}(y_0) = \mathbb{K}y_0 = \left\{ y_h \ : \left| \begin{array}{lll} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & y_h(x) = ky_0(x) = ke^{-A(x)} = ke^{-\int \alpha(x)\mathrm{d}x} \end{array} \right. , \quad k \in \mathbb{K} \right\}$$

i.e $\boxed{\mathcal{S}_H = \{k \times y_0 \mid k \in \mathbb{K}\} \text{ où } y_0(x) = e^{-\int \alpha(x)\mathrm{d}x}}$

ensemble des fonctions de la forme $k.y_0$, avec $k \in \mathbb{K}$.
Conséquence : si on connait une solution particulière y_p de l'équation (E), alors toutes les solutions de (E) sont obtenues avec $y = y_p + k.y_0 = y_p + k.e^{-\int \alpha}$ avec k décrivant $\mathbb{K}$.
Autrement dit, l'ensemble des solutions de (E) est de la forme

$$\boxed{\mathcal{S} = y_p + \text{vect}(y_0) = y_p + \mathbb{K}y_0 = \{y_p + k \times y_0 \mid k \in \mathbb{K}\}}.$$

On dit que $\mathcal{S}$ a une structure de **droite affine**.

On a : $\mathcal{S} = \left\{ y \ : \left| \begin{array}{lll} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & y(x) = y_p(x) + ky_0(x) = y_p(x) + ke^{-A(x)} = y_p(x) + ke^{-\int \alpha(x)\mathrm{d}x} \end{array} \right. , \quad k \in \mathbb{K} \right\}$

i.e $\boxed{\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_H = \{y_p + k \times y_0 \mid k \in \mathbb{K}\} \text{ où } y_p \text{ est une solution particulière de } (EH) \text{ et } y_0(x) = e^{-\int \alpha(x)\mathrm{d}x}}$

Le problème, pour résoudre complètement (E), revient donc à trouver au moins une solution particulière de (E). Parfois, il y en a une évidente ou suggérée. Dans ce cas, on peut en profiter. Sinon, il existe une méthode qui permet d'en trouver une (à une recherche de primitive près). Voir ci dessous.

V - Méthode de la variation de la constante

On a trouvé toutes les solutions de l'équation homogène (EH) «$y' + \alpha y = 0$» : elles sont de la forme $y_h(x) = k.y_0(x) = k.e^{-\int \alpha(x)\mathrm{d}x}$, avec k constante. On cherche maintenant UNE solution particulière y_p de l'équation (E) «$y' + \alpha y = \beta$».
Pour cela, on va en chercher une sous la forme $y_p(x) = C(x).y_0(x) = C(x).e^{-\int \alpha(x)\mathrm{d}x}$ où $C : x \mapsto C(x)$ est une fonction à déterminer pour que y_p réponde à notre problème.
Or, si $y_p(x) = C(x).y_0(x)$, alors $y_p'(x) = C'(x).y_0(x) + C(x).y_0'(x)$.
Donc, pour que y_p soit solution de (E), il faut et il suffit que, pour tout $x \in I$:
$y_p'(x) + \alpha(x)y_p(x) = \beta(x)$, donc en reportant l'expression de y_p
$C'(x).y_0(x) + C(x).y_0'(x) + \alpha(x)C(x).y_0(x) = \beta(x)$, puis on regroupe
$C'(x).y_0(x) + C(x).(y_0'(x) + \alpha(x).y_0(x)) = \beta(x)$.
Mais y_0 est une solution de (EH), donc $y_0'(x) + \alpha(x).y_0(x) = 0$. Ainsi :
$\boxed{C'(x).y_0(x) = \beta(x)}$: on rappelle $y_0(x) = e^{-\int \alpha(x)\mathrm{d}x} \neq 0$ (car pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$).

D'où il est nécessaire et suffisant que, pour tout $x \in I$, $\boxed{C'(x) = \dfrac{\beta(x)}{y_0(x)} = \beta(x).e^{\int \alpha(x)\mathrm{d}x}}$.

Il ne reste plus qu'à trouver UNE primitive quelconque, sur l'intervalle I, de cette fonction, afin de trouver UNE fonction $C : x \mapsto C(x)$ qui convienne, ET ON N'OUBLIE PAS DE REPORTER cette expression de $C(x)$ dans $y_p(x) = C(x).y_0(x) = C(x).e^{-\int \alpha(x)\mathrm{d}x}$ afin de donner UNE solution particulière de l'équation (E).

CONSEIL : il n'est pas nécessaire de connaître par coeur la formule ci-dessus (qui vient de l'égalité $C' \times y_0 = \beta$, où y_0 engendre $\mathcal{S}_H$ et β second membre). Il est même plutôt recommandé de refaire rapidement et systématiquement le raisonnement car cela permet, en plus, de vérifier qu'il n'y a pas eu d'erreur dans le calcul de la solution y_0 de l'équation homogène. En effet, après report de $y_p = C \times y_0$ dans (E), il ne doit PLUS rester de fonction C, on doit aboutir à une équation de la forme $C'(x) = ...$

VI - Un cas particulier courant : (E) « $y'(x)+ay(x) = f(x)$ », $\boxed{a = \textbf{CONSTANTE}}$

Les solutions de (EH) « $y'(x) + ay(x) = 0$ »sont de la forme $y_h(x) = ke^{-ax}$.
Ci dessous, recherche d'une solution particulière y_p dans des cas courants de seconds membres $f(x)$.

- (E) $\boxed{\text{« } y'(x) + ay(x) = b}$, $a, b =$ **constantes** avec $a \neq 0$.
  On peut prendre $y_p(x) = \dfrac{b}{a}$ (fonction constante).
- (E) $\boxed{\text{« } y'(x) + ay(x) = P(x)}$, $P(x) =$ **polynôme**.
  On cherche un **polynôme** Q de **même degré** que P tel que :
  – si $a \neq 0$: $y_p(x) = Q(x)$ soit une solution particulière de (E).
  – si $a = 0$: l'équation devient « $y'(x) = P(x)$, les solutions sont évidentes (les primitives du polynôme P !).
- (E) $\boxed{\text{« } y'(x) + ay(x) = e^{\lambda x}}$, $\lambda =$ **constante**.
  On cherche une **constante** μ telle que :
  – si $\lambda \neq -a$: $y_p(x) = \mu e^{\lambda x}$ soit une solution particulière de (E).
  – si $\lambda = -a$: $y_p(x) = \mu x e^{\lambda x}$ soit une solution particulière de (E).
- (E) $\boxed{\text{« } y'(x) + ay(x) = \sin(\omega x)}$, (ou $\cos(\omega x)$), avec $\omega =$ **constante** réelle.
  On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = \lambda \sin(\omega x) + \mu \cos(\omega x)$ où λ et μ sont des **constantes** réelles à déterminer.

VII - Principe de superposition

Prop : si λ_1 et λ_2 sont des constantes,
– si y_1 est UNE solution de l'équation (E_1) «$y' + \alpha y = \beta_1$»
– si y_2 est UNE solution de l'équation (E_2) «$y' + \alpha y = \beta_2$»
alors, $y_3 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est UNE solution de l'équation (E_3) «$y' + \alpha y = \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2$»
Preuve : c'est immédiat, car en posant $z = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$, on a $z' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2'$, puis
$z' + \alpha z = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' + \alpha(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1(y_1' + +\alpha y_1) + \lambda_2(y_2' + \alpha y_2) = \lambda_1(\beta_1) + \lambda_2(\beta_2)$! donc z est bien une solution de l'équation (E_3).
Intéret : on décompose le second membre de (E) en une somme de termes de manière à décomposer et simplifier les calculs dans la recherche d'une solution particulière. Bien entendu, par récurrence simple, ce principe s'applique également pour une combinaison linéaire de n termes (avec $n \geqslant 2$).
Autre présentation : on note T «l'opérateur» qui, à toute fonction y dérivable, associe la fonction $T(y) = y' + \alpha y$. Si y_1 et y_2 sont des fonctions vérifiant $T(y_1) = \beta_1$ et $T(y_2) = \beta_2$, alors, pour λ et μ constantes, on a $T(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda T(y_1) + \mu T(y_2) = \lambda\beta_1 + \mu\beta_2$ (*linéarité* de l'opérateur T).

VIII - Problème de Cauchy

<u>**Th**</u> : Soit α, $\beta : I \to \mathbb{K}$, deux fonctions continues sur l'intervalle I.
Soit X_0, un élément de I et Y_0 un élément de $\mathbb{K}$: $\boxed{X_0 \in I \text{ et } Y_0 \in \mathbb{K} \text{ (fixés)}}$.
Alors l'EDL (E) «$y'(x) + \alpha(x)y(x) = \beta(x)$» possède UNE, et UNE SEULE solution y vérifiant la **condition initiale** $y(X_0) = Y_0$.

$$\boxed{\text{il y a une, et une seule fonction } y \text{ vérifiant } \begin{cases} y' + \alpha y = \beta \\ y(X_0) = Y_0 \ \textit{(condition initiale)} \end{cases}}.$$

<u>Preuve</u> : toute solution de (E) est de la forme $y(x) = y_p(x) + k.e^{-A(x)}$ où k est une constante à déterminer qui caractérise de manière unique la fonction y (y_p étant une solution particulière dont l'existence a été prouvée par la méthode de la variation de la constante, et A désignant une primitive quelconque de α sur l'intervalle I).
On cherche donc l'existence et l'unicité de la constante k telle que $y(X_0) = Y_0$, autrement dit : $y(X_0) = y_p(X_0) + k.e^{-A(X_0)} = Y_0$. On en tire : $k = (Y_0 - y_p(X_0))\, e^{+A(X_0)}$, qui existe et qui est bien unique, tout comme la fonction y cherchée !
<u>Conclusion</u> : $\boxed{\text{par tout point à abscisse dans } I\text{, il passe une et une seule solution de } (E)}$.
<u>Conséquence IMPORTANTE</u> : lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on appelle **courbes intégrales** de l'équation (E) «$y'(x) + \alpha(x)y(x) = \beta(x)$» les courbes représentatives, sur l'intervalle I, de toutes les solutions y de (E). Le théorème précédent permet d'affirmer que ces courbes intégrales ne peuvent pas s'intersecter sur I. En effet, si c'était le cas, on aurait deux solutions y_1 et y_2 de la même EDL (E), vérifiant la même condition initiale ($y_1(X_0) = y_2(X_0) = Y_0$ si (X_0, Y_0) est le point de concours de ces courbes). Dans ce cas, nécessairement, $y_1 = y_2$!
<u>Autre conséquence</u> : pour une EDL <u>homogène</u> (EH) «$y' + \alpha y = 0$», il y a une solution évidente sur l'intervalle I, la fonction nulle $\tilde{0}$. Le principe précédent s'applique également, donc toute solution y_h de cette (EH), autre que la fonction nulle, ne peut pas s'annuler sur I ! Du coup, par continuité (n'oublions pas qu'elle est dérivable, en tant que solution d'une EDL$_1$), elle garde le même signe (strict) sur l'intervalle I. Ceci permet de justifier le passage de $y' + \alpha y = 0$ à $\dfrac{y'}{y} = -\alpha$ si on cherche une solution y non constamment nulle, puis à $\ln|y| = -A + c$ (c constante), puis $|y| = (e^c)e^{-A}$ et enfin, sur I : $y = +(e^c)e^{-A}$ OU $y = -(e^c)e^{-A}$. on retrouve la forme générale des solutions de (EH) : $y = ke^{-A}$, avec $k \in \mathbb{R}$ ($k = +e^c$ ou $k = -e^c$ ou $k = 0$ qui était solution évidente).

IX - Problème de raccordement de solutions

En général, l'équation est donnée sous la forme (E) «$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$», avec $x \in D$. On commence par chercher les valeurs x_0 telles que $a(x_0) = 0$. Puis, on se place sur un intervalle I sur lequel la fonction a ne s'annule plus.
On est alors ramené à une équation normalisée sur I, du type «$y'(x) + \alpha(x)y(x) = \beta(x)$», équation que l'on sait maintenant résoudre.
Mais la question peut être de trouver des solutions pour l'équation (E) de départ sur le domaine D. La méthode consiste à chercher toutes les solutions sur chaque intevalle I_1, I_2,..., I_n sur lesquels a ne s'annule pas, puis à chercher, parmi toutes les solutions y_1, y_2,..., y_n trouvées sur chaque intervalle,

s'il est possible d'en trouver qui se raccordent entre elles de manière à donner une solution de (E) définie sur «le plus grand intervalle possible».
ATTENTION : il ne s'agit pas juste d'un recollement (continu) de solutions ! Il faut aussi que celui-ci soit dérivable. En général, une fois posé le problème de continuité, on étudie les demi-dérivées à gauche et à droite des points de recollement, et on cherche s'il est possible d'ajuster les constantes pour pouvoir égaler ces demi-dérivées.
Une méthode possible : pour cela, si c'est possible, on peut s'aider de développements limités en a (point de raccordement). Plus précisément, on rappelle que si la fonction possède un $\mathrm{DL}_1(a)$ de la forme $f(x) = f(a)+\alpha\times(x-a)+o((x-a))$, alors la fonction est dérivable en a avec $f'(a) = \alpha$. L'étude des développements limités, éventuellement en séparant à droite et à gauche de a, peut permettre de conclure rapidement.
Autre méthode possible : pour le calcul des dérivées aux points de raccordement, le théorème suivant peut être utile (on le démontrera dans le cours sur la dérivation).

Théorème de prolongement :

- Si f est une fonction **continue** sur le **segment** $[a, b]$
- Si f est une fonction **dérivable** sur l'intervalle $]a, b]$ (**ouvert** en a)
- Si la **dérivée** f' a une **limite** L **finie** en a

ALORS f est **dérivable** en a et $f'(a) = L$.

Ceci signifie que, **sous ces hypothèses**, on a l'égalité $\boxed{\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} f'(x)}$, ce qui n'était pas évident (cela signifie $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$, i.e f' est continue en a).
L'intérêt de ce résultat : pour vérifier que le raccordement est dérivable en un point a, au lieu de calculer les limites des taux d'accroissements à droite et à gauche en a, $\lim\limits_{x\to a^\pm} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, en espérant que ces limites soient finies et égales, il suffit de calculer les limites des dérivées de f en a, à droite et à gauche, $\lim\limits_{x\to a^\pm} f'(x)$, et de vérifier si elles sont finies et égales.
On démontrera ces résultats dans le cours sur la dérivation de fonctions.
Une autre version de ce théorème est :
« $\boxed{\text{SI}}$ f est continue sur le segment $[a, b]$, de classe C^1 sur l'intervalle $]a, b]$, $\boxed{\text{SI}}$ la dérivée f' a une limite L finie en a, $\boxed{\text{ALORS}}$ f est de classe C^1 sur le segment $[a, b]$ ».
Remarque : cette version a bien un intérêt dans notre étude. En effet, si f est une solution sur l'intervalle I de l'équation «$y' + \alpha y = \beta$», alors on a $f' = \beta - \alpha f$, où α et β sont des fonctions continues sur I, tout comme f (car f est même dérivable sur I). Ainsi, par somme et produit, on en déduit que la fonction f' est, elle aussi, continue, ce qui signifie que f est une fonction de classe C^1 sur l'intervalle I. Ce résultat est à retenir :
« si f est une solution sur l'intervalle I de l'équation différentielle $y'(x) + \alpha(x)y(x) = \beta(x)$, avec α et β continues, alors f est une fonction de classe C^1 sur I ».
On peut même l'améliorer : il est facile de prouver, de la même manière avec un raisonnement par récurrence, que si α et β sont des fonctions de classe C^n sur l'intervalle I, alors toute fonction f solution de «$y' + \alpha y = \beta$» est une fonction de classe C^{n+1} sur I. Ainsi, si α et β sont de classe C^∞, f est aussi de classe C^∞.