EXERCICE 1 :

(E) : $y' + y = \cos(x)$

► La solution générale de l'équation homogène associée $y' + y = 0$ est $y_H(x) = \lambda e^{-x}$, $(\lambda \in \mathbb{R})$.

► On détermine une solution particulière y_P de (E) de la forme $y_P(x) = \lambda(x)e^{-x}$ où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ (variation de la constante). On obtient :

$$\begin{cases} y_P(x) = \lambda(x)e^{-x} \\ y_P'(x) = \lambda'(x)e^{-x} - \lambda(x)e^{-x} \\ y_P'(x) + y_P(x) = \lambda'(x)e^{-x} \end{cases}$$

Ainsi y_P est solution particulière si et seulement si $\lambda'(x)e^{-x} = \cos(x) \Leftrightarrow \lambda'(x) = e^x \cos(x)$.

En utilisant une intégration par parties(*), on obtient par exemple $\lambda(x) = \dfrac{1}{2}e^x(\sin(x) + \cos(x))$, ce qui donne la solution particulière $y_P(x) = \dfrac{1}{2}(\sin(x) + \cos(x))$, et la solution générale de l'équation (E) est de la forme :

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = \lambda e^{-x} + \frac{1}{2}(\sin(x) + \cos(x)) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(*) : $\lambda(x) = \displaystyle\int e^x \cos(x)\mathrm{d}x \underset{IPP1\ fcts\ C^1}{=} [e^x \cos(x)] + \int e^x \sin(x)\mathrm{d}x \underset{IPP2\ fcts\ C^1}{=} [e^x \cos(x)] + [e^x \sin(x)] - \int e^x \cos(x)\mathrm{d}x$

Ce qui implique $2\lambda(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x)) \Leftrightarrow \lambda(x) = \dfrac{1}{2}(\sin(x) + \cos(x))$.

$$\begin{aligned}
&\forall x \in [0; +\infty[,\\
&|y(x)| = \left|\lambda e^{-x} + \frac{1}{2}(\sin(x) + \cos(x)\right|\\
\Rightarrow\ &|y(x)| \leqslant |\lambda e^{-x}| + \left|\frac{1}{2}(\sin(x) + \cos(x))\right|\\
\Rightarrow\ &|y(x)| \leqslant |\lambda|e^{-x} + \frac{1}{2}|\sin(x) + \cos(x)| \quad \text{car } e^{-x} \leqslant 1\\
\Rightarrow\ &|y(x)| \leqslant |\lambda| + \frac{1}{2}(|\sin(x)| + |\cos(x)|) \quad \text{car } |\sin(x)| \leqslant 1 \text{ et } |\cos(x)| \leqslant 1\\
\Rightarrow\ &|y(x)| \leqslant |\lambda| + 1
\end{aligned}$$

ce qui prouve que y est bornée sur $[0; +\infty[$. Pour $\lambda = 0$, $y(x) = \dfrac{1}{2}(\sin(x) + \cos(x))$ et la fonction est périodique.

EXERCICE 2 :

(E) : $y' + xy = \cos(x)e^{-x^2/2}$.

► La solution générale de l'équation homogène associée $y' + xy = 0$ est $y_H(x) = \lambda e^{-x^2/2}$, $(\lambda \in \mathbb{R})$.

► On détermine une solution particulière y_P de (E) de la forme $y_P(x) = \lambda(x)e^{-x^2/2}$ où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ (variation de la constante). On obtient :

$$\begin{cases} y_P(x) = \lambda(x)e^{-x^2/2} \\ y_P'(x) = \lambda'(x)e^{-x^2/2} - \lambda(x)xe^{-x^2/2} \\ y_P'(x) + xy_P(x) = \lambda'(x)e^{-x^2/2} \end{cases}$$

Ainsi y_P est solution particulière si et seulement si $\lambda'(x)e^{-x^2/2} = \cos(x)e^{-x^2/2} \Leftrightarrow \lambda'(x) = \cos(x)$.

Le choix de $\lambda(x) = \sin(x)$ donne la solution particulière $y_P(x) = \sin(x)e^{-x^2/2}$, et la solution générale de l'équation (E) est de la forme :

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = \lambda e^{-x^2/2} + \sin(x)e^{-x^2/2} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

EXERCICE 3 :

$(E) : xy'(x) + y(x) = \arctan(x)$.

- La solution générale de l'équation homogène associée $xy'(x) + y(x) = 0$ est $y_H(x) = \dfrac{\lambda}{x}, (\lambda \in \mathbb{R})$.
- On détermine une solution particulière y_P de (E) de la forme $y_P(x) = \dfrac{\lambda(x)}{x}$ où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ (variation de la constante). On obtient :

$$\begin{cases} y_P(x) = \dfrac{\lambda(x)}{x} \\ y'_P(x) = \dfrac{\lambda'(x)}{x} - \dfrac{\lambda(x)}{x^2} \\ xy'_P(x) + y_P(x) = \lambda'(x) \end{cases}$$

Ainsi y_P est solution particulière si et seulement si $\lambda'(x) = \arctan(x)$.
Par une intégraton par parties (*), on obtient rapidement : $\lambda(x) = -\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + x\arctan(x)$ et donc l'ensemble des solutions de (E) est de la forme :

$$S_{(E)} = \left\{ x \longmapsto -\frac{1}{2x}\ln(1+x^2) + \arctan(x) + \frac{\lambda}{x},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(*) : \lambda(x) = \int \arctan(x)\mathrm{d}x \underset{IPP\ fcts\ C^1}{=} [x\arctan(x)] - \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x \underset{primit.usuelle}{=} x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

EXERCICE 4 :

1. $y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 0$, *solution vérifiant les conditions initiales* $\longrightarrow y(x) = \dfrac{1}{2}(-\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{3x})$
2. $x''(t) + 2x'(t) = 0$, *solution vérifiant les conditions initiales* $\longrightarrow x(t) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}$
3. $y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0$, *solution vérifiant les conditions initiales* $\longrightarrow y(x) = x\mathrm{e}^{3x}$
4. $x''(t) + 2x(t) = 0$, *solution vérifiant les conditions initiales* $\longrightarrow x(t) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}t) + \sin(\sqrt{2}t)$
5. $y''(x) + 2y'(x) + 3y(x) = 0$, *solution vérifiant les conditions initiales* $\longrightarrow y(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)\right)$

EXERCICE 5 :

Non corrigé.

EXERCICE 6 :

$y''(x) - (m+1)y'(x) + my = \mathrm{e}^x - x - 1$ où m est un paramètre.
On note (H) l'équation homogène.

- Soit (E_c) l'équation caractéristique $r^2 - (m+1)r + m = 0$ (déduite de l'équation homogène). Le calcul du discriminant donne $\Delta = (m-1)^2$, ce qui induit deux cas puisque $\Delta \geqslant 0$.
  - si $m = 1$ alors $\Delta = 0$ donc (E_c) admet une racine double $r = 1$ et la solution générale de l'équation (H) est $y_H(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2x\mathrm{e}^x$, avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$
  - si $m \neq 1$ alors $\Delta > 0$ donc (E_c) admet deux racines distinctes :
  $r_1 = \dfrac{m+1-|m-1|}{2}$ et $r_2 = \dfrac{m+1+|m-1|}{2}$ qui donnent 1 et m suivant que $m > 1$ ou $m < 1$.

La solution générale de l'équation (H) est $y_H(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{mx}$, avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$

► On recherche désormais une solution particulière de l'équation
$$y''(x) - (m+1)y'(x) + my(x) = \mathrm{e}^x,\ (E_1)$$

- Si $m \neq 1$, comme 1 (dans $\mathrm{e}^{1\times x}$) est racine simple de l'équation caractéristique, on recherche une solution particulière de la forme $y_P(x) = ax\mathrm{e}^x$, ce qui donne :
$$\left\{\begin{array}{r} y_P(x) = ax\mathrm{e}^x \\ y_P'(x) = a(\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x) \\ y_P''(x) = a(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x) \\ y_P''(x) - (m+1)y_P'(x) + my_P(x) = a\mathrm{e}^x(-m+1) \end{array}\right.$$

  Ainsi y_P est solution particulière si et seulement si $a\mathrm{e}^x(1-m) = \mathrm{e}^x \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{1-m}$.

  On obtient donc, comme solution particulière : $y_P(x) = \dfrac{x}{1-m}\mathrm{e}^x$.
- Si $m = 1$, comme 1 (dans $\mathrm{e}^{1\times x}$) est racine double de l'équation caractéristique, on recherche une solution particulière de la forme $y_P(x) = ax^2\mathrm{e}^x$, ce qui donne :
$$\left\{\begin{array}{r} y_P(x) = ax^2\mathrm{e}^x \\ y_P'(x) = a(x^2\mathrm{e}^x + 2x\mathrm{e}^x) \\ y_P''(x) = a(2\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x + 4x\mathrm{e}^x) \\ y_P''(x) - 2y_P'(x) + y_P(x) = 2a\mathrm{e}^x \end{array}\right.$$

  Ainsi y_P est solution particulière si et seulement si $2a\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$.

  On obtient donc, comme solution particulière : $y_P(x) = \dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^x$.

► On recherche désormais une solution particulière de l'équation
$$y''(x) - (m+1)y'(x) + my(x) = -x - 1,\ (E_2)$$

- Si $m = 0$ alors 0 est racine simple de (EC), on recherche une solution particulière de la forme $y_P(x) = x(ax+b)$, ce qui donne :
$$\left\{\begin{array}{r} y_P(x) = ax^2 + bx \\ y_P'(x) = 2ax + b \\ y_P''(x) = 2a \\ y_P''(x) - y_P'(x) = -2ax2a - b \end{array}\right.$$
  Ainsi y_P est solution particulière si et seulement si $-2ax2a - b = -x - 1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2a = -1 \\ 2a - b = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = 2 \end{array}\right.$.

  On obtient donc, comme solution particulière : $y_P(x) = x\left(\dfrac{1}{2}x + 2\right)$.
- Si $m \neq 0$ alors 0 n'est pas racine de (EC), on recherche une solution particulière de la forme $y_P(x) = ax + b$, ce qui donne :
$$\left\{\begin{array}{r} y_P(x) = ax + b \\ y_P'(x) = a \\ y_P''(x) = 0 \\ y_P''(x) - (m+1)y_P'(x) + my_P(x) = max + mb - (m+1)a \end{array}\right.$$
  Ainsi y_P est solution particulière si et seulement si $max + mb - (m+1)a = -x - 1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} ma = -1 \\ mb - ma - a = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -1/m \\ b = (-2m-1)/m^2 \end{array}\right.$.

  On obtient donc, comme solution particulière : $y_P(x) = -\dfrac{1}{m}x - \dfrac{2m+1}{m^2}$.

► Une solution particulière de (E) s'obtient en ajoutant les solutions particulières de (E_1) et de (E_2).

► SOLUTIONS Générales (synthèse des résultats)

- Si $m \in \mathbb{R} - \{0;1\}$ alors la solution générale de (E) est :
$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{mx} + \frac{x}{1-m}e^x - \frac{1}{m}x - \frac{2m+1}{m^2}\ ,(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$
- Si $m = 1$ alors la solution générale de (E) est :
$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{x^2}{2}e^x - x - 3\ ,(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$
- Si $m = 0$ alors la solution générale de (E) est :
$$y(x) = C_1 e^x + C_2 + x e^x + \frac{x^2}{2} + 2x\ ,(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

EXERCICE 7 :

$$(E) :\ y''(x) + y'(x) + y(x) = \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) e^{-x/2}.$$

► L'équation caractéristique associée à l'équation homogène (H) est $r^2+r+1 = 0$ et les solutions sont les nombres complexes conjugués :
$$r_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ et } r_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$
La solution générale de (H) est donc $y_H(x) = \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) e^{-x/2}, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$

► Comme $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ est racine de (EC), on recherche une solution particulière de la forme :
$y_P(x) = \left(ax\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + bx\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) e^{-x/2}$, ce qui donne :
$$\begin{cases} y_P(x) = \left(ax\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + bx\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) e^{-x/2} \\ y_P'(x) = \left((a - \frac{a}{2}x + \frac{b\sqrt{3}}{2}x)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + (b - \frac{b}{2}x - \frac{a\sqrt{3}}{2}x)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) e^{-x/2} \\ y_P''(x) = \left((b\sqrt{3} - \frac{b\sqrt{3}}{2}x - \frac{a}{2}x)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + (-b - a\sqrt{3} + \frac{a\sqrt{3}}{2}x - \frac{b}{2}x)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) e^{-x/2} \end{cases}$$

Ainsi y_P est solution particulière si et seulement si
$$\left((a+b\sqrt{3})\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + (b-a\sqrt{3})\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) e^{-x/2} = \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) e^{-x/2} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b\sqrt{3} = 1 \\ b - a\sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/4 \\ b = \sqrt{3}/4 \end{cases}.$$
On obtient donc, comme solution particulière : $y_P(x) = \left(\frac{1}{4}x\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}x\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) e^{-x/2}$.

► La solution générale de (E) est donc :
$$y(x) = \left(C_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{4}x\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}x\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) e^{-x/2}, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$