Ensembles

Exercice 1 *Soit E un ensemble, et A, B deux parties de E, on désire montrer que si $A \cap B = A \cup B$ alors $A = B$.*

1. *Le prouver avec les fonctions indicatrices.*
2. *Le prouver par un raisonnement ensembliste.*

Exercice 2 *Soit E un ensemble, et A, B, C trois sous-ensembles de E*

1. *Montrer que $A \subset B \iff \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$*
2. *On pose $X = A \cup (B \cap C)$ et $Y = (A \cup B) \cap C$, montrer que l'un des deux contient l'autre.*
3. *On suppose que $A \cap C \subset B \cap C$ et que $A \cup C \subset B \cup C$, montrer que $A \subset B$.*
4. *Reprendre les questions 2 et 3 par un raisonnement direct sur les ensembles.*

Exercice 3 *Soit E un ensemble, pour $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, on définit la différence symétrique $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.*

1. *Calculer $A\Delta A$, $A\Delta E$ et $A\Delta\varnothing$.*
2. *Exprimer $\mathbb{1}_{A\Delta B}$ à l'aide de $\mathbb{1}_A$ et de $\mathbb{1}_B$.*
3. *Montrer que si $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$, on a $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$*
4. *Soit $\Phi : \left| \begin{array}{c} \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ X \longmapsto X\Delta A \end{array} \right.$, calculer $\Phi \circ \Phi(X)$, puis résoudre l'équation $X\Delta A = B$.*

Exercice 4 *Soit E un ensemble, et A, B deux parties de E, résoudre les équations d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$*

$$① \quad X \cup A = B. \qquad ② \quad X \cap A = B.$$

Exercice 5 *Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \geq 1$, on note $A_p = \{k \in \mathbb{N},\ k \leq n \text{ et } p \text{ divise } k\}$ l'ensemble des entiers inférieurs à n et divisible par p. Montrer que $\#A_p = \left\lfloor \dfrac{n}{p} \right\rfloor$. Combien a-t-il d'entiers inférieurs à n et divisible par 3 et 5 ?*

Récurrence

Exercice 6 *Montrer que pour tout entier n l'entier naturel $n\left(n^2+5\right)$ est divisible par 6.*

Exercice 7 *Soit $(s_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Montrer que $s_n > 2\sqrt{n+1} - 2$. En déduire la limite de s_n quand n tend vers $+\infty$.*

Exercice 8 *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k)! \geq ((n+1)!)^n$*

Exercice 9 *Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$.*

Exercice 10 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par*

$$u_0 = 1,\ u_1 = 10 \text{ et } \forall n \geq 0,\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n + 3n + 8$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4^{n+1} - \dfrac{(n+3)(n+2)}{2}$

Exercice 11 *On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par*

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Montrer par récurrence forte que pour tout $n \geq 1$, $u_n = 2^{n-1}$.

Exercice 12 *Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ est non nul,* $\sqrt{\dfrac{3}{4n+3}} \leq \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{4k+1}{4k+3} \leq \sqrt{\dfrac{5}{4n+5}}$.

Exercice 13 *Montrer que,*$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ *(Faire une récurrence sur n, à p fixé).*

Exercice 14 *Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$ définie par $f(n,p) = 2^n(2p+1)$, montrer par récurrence sur q que l'équation $f(n,p) = q$ admet toujours une solution. Prouver que f est une bijection.*

Exercice 15 *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers naturels non nuls telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$$

Que peut-on dire des a_n ?

Exercice 16 *On définit pour $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, $u(n,m) = \dfrac{(2m)!\,(2n)!}{n!m!\,(m+n)!}$, montrer que si $m \geq 1$,*

$$u(n,m) + u(n+1,m-1) = 4u(n,m-1)$$

En déduire que $u(m,n) \in \mathbb{N}$.

Exercice 17 *Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $f(2) = 2$ et $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $f(pq) = f(p)f(q)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$.*

Calcul algèbrique

Exercice 18 *Calculer* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k,\ \sum_{i=1}^{n} k,\ \sum_{k=1}^{n} i,\ \sum_{k=1}^{n} n$ *et* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k,\ \prod_{i=1}^{n} k,\ \prod_{k=1}^{n} i,\ \prod_{k=1}^{n} n$.

Exercice 19 *Donner une autre expression des termes suivants :* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha a_k,\ \sum_{k=1}^{n} (\alpha + a_k),\ \prod_{k=1}^{n} \alpha a_k,\ \prod_{k=1}^{n} a_k^{\alpha}$.

Exercice 20 *Déterminer a et b dans $\mathbb{Z}$ tels que* $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$, *en déduire* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

S'inspirer de la méthode pour en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 21 *En remarquant que $k \times k! = (k+1-1) \times k!$, calculer* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$

Exercice 22 *Calculer* ① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$, ② $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ *et* ③ $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

Exercice 23 *Soient $(p,n) \in \mathbb{N}^2$, On pose $A = 2 \times 4 \times \cdots \times 2n$ et $B = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)$. Simplifier $A \times B$, puis A et $\dfrac{A}{B}$.*

Exercice 24 *On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, $S_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$. On rappelle que $S_{n,1} = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $S_{n,2} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $S_{n,3} = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$. Calculer*

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ ② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2(n+1-k)$ ③ $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} ij$

Exercice 25 *Montrer que* $(n!)^2 = \prod_{k=1}^{n} k\,(n-k+1)$.

Exercice 26 *Calculer* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}\right)$.

Exercice 27 *Calculer* $\displaystyle\sum_{0\leq p\leq q\leq n} 2^p$ *de deux manières, en déduire la valeur de* $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} p2^p$.

Exercice 28 *Calculer (pour* n *et* m *entiers)*

$$① \sum_{1\leq i,j\leq n}\min(i,j) \qquad ② \sum_{0\leq k\leq n\leq m}(2k+1) \qquad ③ \sum_{0\leq i\leq k\leq n}\frac{i}{k+1}$$

Exercice 29 *Calculer* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i}$.

Arithmétique élémentaire

Exercice 30 *Montrer que* $\forall n\in\mathbb{N}$, n^2 *divise* $(n+1)^n-1$.

Exercice 31 *Déterminer les entiers* $n\in\mathbb{Z}$ *tels que* $\dfrac{2n^2-2n+4}{n+1}\in\mathbb{Z}$.

Exercice 32 *Soient* a *et* b *dans* $\mathbb{N}$, *on note* q *et* r *le quotient et le reste de la division euclidienne de* $(a-1)$ *par* b. *Pour* $n\in\mathbb{N}$, *effectuer la division euclidienne de* ab^n-1 *par* b^{n+1}.

Exercice 33 *Soient* $a_1,\cdots,a_{2014}$ *des entiers, montrer que l'on peut en trouver* n *consécutifs dont la somme est divisible par* 2014. *On pourra poser* $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ *et regarder* q_n *le reste de la division euclidienne de* S_n *par* 2014.

Exercice 34 *Montrer qu'il n'existe aucun nombre premier entre* $n!+2$ *et* $n!+n$.

Exercice 35 *Quel est le plus petit entier ayant* 15 *diviseurs distincts.*

Exercice 36 *Soit* $\mathcal{P}=\{p_1,p_2,\cdots,p_n,\cdots\}$ *l'ensemble des nombres premiers rangés par ordre croissant (ainsi* $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5,\cdots$*).*

1. *Montrer que* $p_{k+1}\leq 1+\displaystyle\prod_{i=1}^{k}p_i$.
2. *En déduire que* $p_n\leq 2^{2^n}$.

Exercice 37 *On se propose de montrer que si* a^n-1 *est premier alors* n *est premier et* $a=2$.

1. *Soit* $2\leq p<q$ *deux entiers, montrer que* $2^{pq}-1$ *n'est pas premier.*
2. *Montrer que si* 2^n-1 *est premier alors* n *est premier (la réciproque est fausse comme le prouve* $2^{11}-1=23\times 89$*).*
3. *Montrer que si* $a>2$ *et* $n\geq 2$ *alors* a^n-1 *n'est pas premier.*

Exercice 38 *Une puissance de* 2 *augmentée d'une unité peut-elle être un cube ?*

Dénombrement

Exercice 39 *Une urne contient* 10 *boules numérotées, combien y a-t-il de tirages si*

1. *On tire trois boules successivement avec remise.*

2. *On tire trois boules successivement sans remise.*

3. *On tire trois boules ensembles.*

Exercice 40 *Avec les 26 lettres de l'alphabet combien peut-on former*

1. *De mots ayant cinq lettres.*

2. *De mots ayant cinq lettres distinctes.*

3. *De mots de cinq lettres ayant quatre lettres distinctes.*

Exercice 41 *Combien y a-t-il d'anagrammes de "stylographique", et de "barbapapa" ?*

Exercice 42 *On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir*

1. *Sans imposer de contraintes.*

2. *Contenant 5 carreaux ou 5 piques.*

3. *Contenant 2 carreaux et 3 piques.*

4. *Contenant cinq couleurs différentes.*

5. *Contenant au moins un Roi.*

6. *Contenant 2 Rois et 3 piques.*

7. *Contenant un carré.*

Exercice 43 *On lance trois dés à six faces numérotés et discernable par leur couleur.*

1. *Combien y a-t-il de tirages différents ?*

2. *Combien y a-t-il de tirages contenant au moins un 6 ?*

3. *Combien y a-t-il de tirages contenant deux et seulement deux faces ayant le même chiffre.*

4. *Combien y a-t-il de tirages tels que la somme des chiffres des trois dés soit paire.*

5. *Combien y a-t-il de tirages contenant deux faces ayant le même chiffre et dont la somme des chiffres des trois dés est paire ?*

Exercice 44 *Soient $(m,n,p) \in \mathbb{N}^3$, on considère deux ensembles A et B disjoints et de cardinaux m et n respectivement. En dénombrant de deux façons différentes le nombre de parties à p éléments de $A \cup B$, montrer que*

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{m+n}{p}$$

Exercice 45 *Soit E un ensemble à n éléments, déterminer le nombre de couples (A,B) de parties distinctes telles que $A \cap B = \varnothing$.*

Exercice 46 *Calculer $\displaystyle\sum_{A\subset E} \#A$, $\displaystyle\sum_{\substack{A\subset E\\ B\subset E}} \#\left(A\cap B\right)$,$\displaystyle\sum_{\substack{A\subset E\\ B\subset E}} \#\left(A\cup B\right)$ où E est fini de cardinal n.*