AL 2 - Ensembles - Applications

1 Ensembles

Définition 1

1. Un **ensemble** est une collection d'objets.
2. Soient A et B deux ensembles. On dit que A est **inclus** dans B (ou que A est une **partie** de B) si, pour tout x de A, x est élément de B. On note alors $A \subset B$.
3. On note $\mathcal{P}(A)$ **l'ensemble des parties** de A.

Remarque 1

1. On peut exprimer l'inclusion de A dans B comme suit :

$$\forall x \in E,\ x \in A \implies x \in B.$$

2. On a $\varnothing \subset A$ et $A \subset A$ pour tout ensemble A.
3. La négation de $A \subset B$ notée $A \not\subset B$ signifie que :

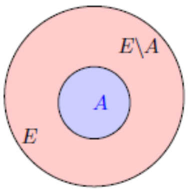
$$\exists x \in A,\ x \notin B.$$

4. $A = B \iff (A \subset B \text{ et } B \subset A)$.
5. $A \neq B \iff (A \not\subset B)$ ou $(B \not\subset A)$.
6. $(A \subset B \text{ et } B \subset C) \implies (A \subset C)$ **transitivité**.

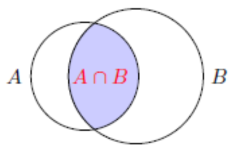
Définition 2 Opérations dans $\mathcal{P}(E)$

Soient E un ensemble, A et B des parties de E, on définit :

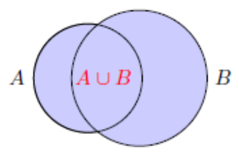
1. $\complement_E(A) = \{x \in E \,/\, x \notin A\}$ **complémentaire** de A dans E. On le note aussi $E \setminus A$ et $\overline{A}$.



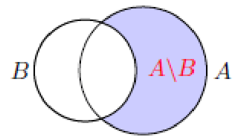
2. $A \cap B = \{x \in E \,/\, x \in A \ \wedge\ x \in B\}$ **intersection** de A et B.



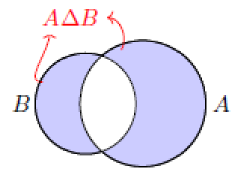
3. $A \cup B = \{x \in E \,/\, x \in A \ \vee\ x \in B\}$ **réunion** de A et B.



4. $A\backslash B = \{x \in A \,/\, x \notin B\} = A \cap \overline{B}$ **différence** : A moins B.



5. $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A) = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$ **différence symétrique** de A et B.



Proposition 1
Soient A, B et C des parties d'un ensemble E.

1. $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$ (**commutativité**) ;
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. On peut donc écrire simplement $A \cap B \cap C$ et $A \cup B \cup C$ (**associativité**) ;
3. $A \cap \varnothing = \varnothing, \quad A \cup \varnothing = A$;
4. $A \subset B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$;
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (**distributivité**) ;
6. $\overline{(\overline{A})} = A, \quad A \subset B \Longleftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$;
7. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (**lois de Morgan**).

Remarque 2
Si $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille de parties de E, on note :

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i = \{x \in E \,/\, \exists i \in \mathbb{N},\, x \in E_i\} \text{ et } \bigcap_{i\in\mathbb{N}} E_i = \{x \in E \,/\, \forall i \in \mathbb{N}, x \in E_i\}.$$

Définition 3
Soit I une partie de $\mathbb{N}$ et $(E_i)_{i\in I}$ une famille de parties non vides d'un ensemble E, on dit que cette famille forme une **partition** de E si :

$$\bigcup_{i\in I} E_i = E \text{ et } \forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \implies E_i \cap E_j = \varnothing.$$

Définition 4
Soient E et F deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de E et F l'ensemble :

$$E \times F = \{x = (x_1, x_2) \,/\, x_1 \in E, x_2 \in F\}.$$

Remarque 3
Cette définition s'étend au produit cartésien d'une famille finie d'ensembles.

2 Applications

Définition 5
Soient E et F deux ensembles.

1. On appelle **fonction** de E vers F toute relation f de E vers F telle que pour tout élément x de E, on lui associe au plus un élément y de F ; on écrit $y = f(x)$. On note $f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$ ou parfois $f : E \to F, \quad f : x \mapsto f(x)$.
On dit alors que $f(x)$ est l'**image** de x par f (élément de F associé à x par f) et que x est un antécédent de y.
2. On appelle **ensemble de définition** (ou **domaine de définition**) de la fonction f, l'ensemble des éléments x de E tels qu'il existe y de F vérifiant $y = f(x)$; cet ensemble est noté $\mathcal{D}_f$.
3. Une fonction f est appelée **application** lorsque $\mathcal{D}_f = E$. L'ensemble des applications de E vers F est noté F^E ou $\mathcal{F}(E, F)$.

Remarque 4

1. $f : E \to E,\ f : x \mapsto x$ est appelée **application identique** dans E (ou **identite** de E) et notée Id_E.
2. Soient A une partie de E et $f : E \to E$ définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$.
f est appelée **fonction indicatrice** de la partie A et notée $\mathbb{1}_A$.

Définition 6
Soient deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On définit l'**application composée** $g \circ f : E \to G$ par :

$$\forall x \in E,\ g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Proposition 2 Associativité

Pour toutes applications $f : E \to F, g : F \to G$ et $h : G \to H$, on a :

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Définition 7
Le **graphe** de $f : E \to F$ est :

$$\Gamma_f = \Big\{ \big(x, f(x)\big) \in E \times F \mid x \in E \Big\}.$$

Définition 8
Soit f une application de E vers F.
On dit que :

1. f est **injective** si :
$$\forall (a, b) \in E^2,\ a \neq b \implies f(a) \neq f(b);$$
ou encore :
$$\forall (a, b) \in E^2,\ f(a) = f(b) \implies a = b.$$
2. f est **surjective** si :
$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y.$$
3. f est **bijective** si f est injective et surjective, ou encore :
$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ = f(x).$$

Théorème-Définition 1 Caractérisation d'une bijection

1. $f : E \to F$ est bijective si, et seulement s'il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

2. Si f est bijective alors l'application g est unique et elle aussi est bijective.
L'application g s'appelle la **bijection réciproque** de f et est notée f^{-1}.
Elle est caractérisér par :
$$\forall x \in E, \forall y \in F, \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$
De plus, elle vérifie : $g^{-1} = \left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Exemple 1
La fonction $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ définie par $f(x) = \exp(x)$ est bijective, sa bijection réciproque est $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(y) = \ln(y)$.
On a bien $\exp\big(\ln(y)\big) = y$, pour tout $y \in]0, +\infty[$ et $\ln\big(\exp(x)\big) = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 3
Soient deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

2. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

3. La composée de deux injections (resp. surjections) est une injection (resp. surjection).

4. La composée de deux bijections est une bijection et on a :
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Définition 9
Soit f une application de E vers E.
Si $f \circ f = \mathrm{Id}_E$ alors on dit que f est **involutive**.

Remarque 5
Si f est involutive, alors f est bijective et $f^{-1} = f$.

Définition 10
Soit f une application de E vers F.

1. Soit A une partie de E. L'application $g : A \to F$ définie par $\forall x \in A,\ g(x) = f(x)$ est appelée **restriction** de f à A et est notée $f|_A$.

2. Soit E' une partie contenant E. Toute application $h : E' \to F$ vérifiant $\forall x \in E,\ h(x) = f(x)$ est appelée **prolongement** de f à E'.

Définition 11
Soit f une application de E vers F.

1. Pour toute partie A de E on définit l'**image directe** de A par f, notée $f(A)$, par :
$$f(A) = \{f(x) \in F \,/\, x \in A\}.$$

2. Pour toute partie B de F on définit l'**image réciproque** de B par f, notée $f^{-1}(B)$, par :
$$f^{-1}(B) = \{x \in E \,/\, f(x) \in B\}.$$

Remarque 6
L'ensemble $f^{-1}(B)$ existe toujours, même si f^{-1} n'existe pas.

Définition 12
Soient $A \subset E$ et $f : E \to E$.
On dit que A est **stable** par f si $f(A) \subset A$ et on dit que A est **invariant** par f si $f(A) = A$.

3 Relations

Définition 13
Soient E et F deux ensembles.
On appelle **relation binaire** $\mathcal{R}$ de E vers F un triplet (E, F, G) où G est une partie de $E \times F$.
G est appelé **graphe** de la relation.
Pour $x \in E, y \in F$, on note $x\,\mathcal{R}\,y$ lorsque $(x, y) \in G$.
Si $E = F$ une relation binaire $\mathcal{R}$ de E vers lui-même est dite **relation** dans E.

Exemple 2
Pour $E = \mathbb{N}$ et $F = \{0, 1\}$ on peut définir la relation $\mathcal{R}$ par $n\mathcal{R}0$ si n est pair et $n\mathcal{R}1$ si n est impair.
On a alors $G = \{(2p, 0) \ / \ p \in \mathbb{N}\} \times \{(2p + 1, 1) \ / \ p \in \mathbb{N}\}$.

Définition 14
Soit $\mathcal{R}$ une relation dans un ensemble E. On dit que :

1. $\mathcal{R}$ est **réflexive** si : $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$;

2. $\mathcal{R}$ est **symétrique** si : $\forall (x, y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$;

3. $\mathcal{R}$ est **transitive** si : $\forall (x, y, z) \in E^3,\ (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$;

4. $\mathcal{R}$ est **antisymétrique** si : $\forall (x, y) \in E^2,\ (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \implies x = y$.

Définition 15
Soit $\mathcal{R}$ une relation dans un ensemble E.
On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** si elle est réflexive, symétrique et transitive.
Pour $x \in E$, $\overline{x} = \{y \in E \ / \ y\mathcal{R}x\}$ est alors appelée **classe d'équivalence** de x.