EXERCICE 1 :

$(E):\ x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0.$

Supposons que $x = \dfrac{p}{q}$ une racine rationnelle de l'équation (E) avec p et q premiers entre eux.
En réduisant au même dénominateur, on obtient :

$$p^n + a_{n-1}qp^{n-1} + \ldots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$$

Puisque q divise $a_{n-1}qp^{n-1} + \ldots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n$, alors q divise p^n. Or p et q sont premiers entre eux donc nécessairement $q = 1$ et donc $x = p$, ce qui implique que $x \in \mathbb{Z}$. Ainsi les racines rationnelles de (E) sont entières.
e x, et dont les coefficients a_i sont des entiers (pour $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$
Montrer que les solutions réelles de (E) sont entières ou irrationnelles.

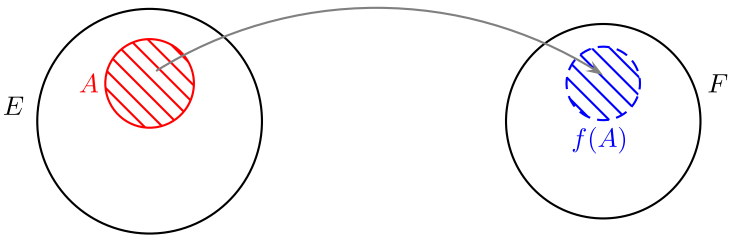
EXERCICE 2 :

1. Soit $x \in A$. On a donc $f(x) \in f(A)$ puisque $f(A)$ est l'ensemble des images des éléments de A. Or d'après ce qui précède $f^{-1}(f(A)) = \{x \in E \,\text{tels que}\, f(x) \in f(A)\}$, donc $x \in f^{-1}(f(A))$ et l'inclusion est établie.

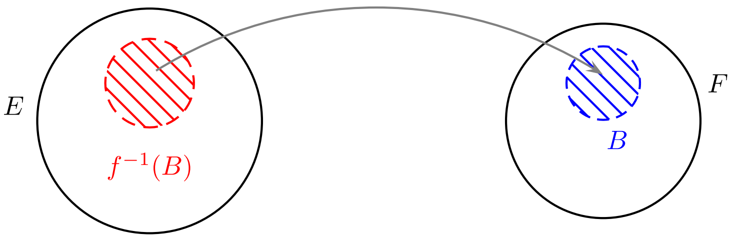
2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2$. Avec $A = [0;1]$, $f(A) = [0;1]$ et $f^{-1}(f(A)) = [-1;1]$, on a bien $A \subset f^{-1}(f(A))$ (inclusion stricte)

3. Soit $y \in f(f^{-1}(B))$, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$ (grâce à $(\bigstar)$).
   Mais dire que $x \in f^{-1}(B)$ signifie que $f(x) \in B$ (grâce à (Δ)), mais comme $y = f(x)$ alors $y \in B$.
   L'inclusion $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ est établie.

4. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2$. Avec $B = [-1;4]$, $f^{-1}(B) = [-2;2]$ et $f(f^{-1}(B)) = [0;4]$, on a bien $f(f^{-1}(B)) \subset B$ (inclusion stricte)



Signification de $\mathbf{f(A)}$:
A partie de E, $f(A)$ est une partie de F dont les éléments ont la propriété de s'écrire $f(a)$ où a est un élément de A.
Ce qui s'écrit en langage mathématique
$f(A) = \{y \in F \,\text{tels que}\, \exists a \in A, y = f(a)\}$ $(\bigstar)$
ou $f(A) = \{f(a),\ a \in A\}$



Signification de $\mathbf{f^{-1}(B)}$:
B partie de F, $f^{-1}(B)$ est une partie de E dont les éléments ont une image dans B.
Ce qui s'écrit en langage mathématique
$f^{-1}(B) = \{x \in E \,\text{tels que}\, f(x) \in B\}$ (Δ)

EXERCICE 3 :

$f : E \longrightarrow F$ une application.

▷ Supposons que f est injective. Soit A une partie de E. Soit $x \in f^{-1}(f(A))$, on a $f(x) \in f(A)$ donc il existe $x' \in A$ tel que $f(x) = f(x')$. Or f est injective donc $x = x'$ et $x \in A$, ce qui implique que $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Dans l'exercice précédent, on a justifié l'inclusion $A \subset f^{-1}(f(A))$, on a donc l'égalité $A = f^{-1}(f(A))$.
Réciproquement, supposons que $A = f^{-1}(f(A))$ et prenons x, x' dans E ; si l'on fait l'hypothèse que $f(x) = f(x')$, en considérant la partie $A = \{x\}$, on a $f(A) = f(\{x\})$ et $f(x') \in f(A)$ (puisque $f(x) = f(x')$) donc $x' \in f^{-1}(f(A))$, c'est à dire $x' \in A$ d'où $x' = x$; f est injective.

- $\triangleright$ Supposons que f est surjective, soit $y \in B$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Puisque $f(x) \in B$, on a $x \in f^{-1}(B)$ et donc $y \in f(f^{-1}(B))$ ce qui implique que $B \subset f(f^{-1}(B))$. Or, l'exercice précédent a permis de voir que $f(f^{-1}(B)) \subset B$, par double inclusion, on a l'égalité.
  Réciproquement, supposons que $\forall B$ partie de E, $f(f^{-1}(B)) = B$. Soit $y \in F$, pour $B = \{y\}$, $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$, ce qui prouve que $f^{-1}(\{y\})$ est non vide. On en conclut que f est surjective.

EXERCICE 4 :

$\forall x \in E$, $(g \circ f_1)(x) = (g \circ f_2)(x) \Leftrightarrow g(f_1(x)) = g(f_2(x))$. Or g est injective, donc on a $f_1(x) = f_2(x)$.

On obtient donc $f_1 = f_2$.

EXERCICE 5 :

Soit E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$.

On a assez rapidement $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$. En effet, si $x \in A \cap A'$, alors $f(x) \in f(A \cap A')$. Et $x \in A$ implique que $f(x) \in f(A)$ et $x \in A'$ permet de dire que $f(x) \in f(A')$; ainsi $f(x) \in f(A) \cap f(A')$. Supposons que f est injective. Soit $y \in f(a) \cap f(A')$, il existe $x \in A$ et $x' \in A'$ tels que $y = f(x) = f(x')$. Or f est injective donc $x = x'$ et $x \in A \cap A'$ donc $y \in f(A \cap A')$. C'est ainsi que $f(A) \cap f(A') \subset f(A \cap A')$ et donc l'égalité.

Réciproquement, $\forall A, A' \in \mathcal{P}(E)$, $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.
Soit $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Pour $A = \{x\}$ et $A' = \{x'\}$, on obtient $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A') = f(\{x\})$ et $f(\{x\})$ est non vide donc $A \cap A'$ est non vide et $x = x'$, ce qui implique l'injectivité de f.