Devoir surveillé 1

Consignes :

- Calculatrice interdite.
- Ne mélanger pas les exercices, une nouvelle copie pour chaque exercice.
- Numéroter chaque copie et mettre son nom sur chaque feuille.
- Encadrer les résultats.
- Les phrases d'explications courtes et claires avant tout calcul peut permettre de gagner des points.
- Les copies dont la propreté et la présentation laissent à désirer seront sanctionnées (Les ratures et les plaques de blanc correcteur sont à bannir).

Exercice 1. [Sommes et produits]

1. Exprimer sous forme réduite
$$A_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j},$$
puis déterminer le plus petit entier strictement positif q tel que pour tout entier n, qA_n est un nombre entier.
2. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite (u_n) par
$$u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + a^{\left(2^k\right)}\right).$$
   (a) Exprimer sous forme réduite $(a-1)u_n$. *(Une rédaction rigoureuse est attendue.)*
   (b) Exprimer u_n sous forme réduite.
   (c) Déterminer pour quelle valeur(s) de a, la suite (u_n) converge vers une limite finie. On précisera la limite.

Exercice 2. [Un système]

Discuter en fonction a et b du nombre de solutions du système :

$$\begin{cases} 2x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & - & y & + & z & = & 4 \\ 3x & + & 3y & - & z & = & 4a \\ (2-a)x & + & 2y & - & 2z & = & -2b. \end{cases}$$

Exercice 3. Résoudre sur $\mathbb{R}$
$$-|x+3| + |2x+3| - 2|x-1| \leq -1.$$

Exercice 4.

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $f_{a,b}$ sur $[-b, +\infty[$ par :

$$f_{a,b}(x) = a - \sqrt{b+x}.$$

On dit que u et v sont 2 réels échangeables, si il existe (a,b) tel que $f_{a,b}(u) = v$ et $f_{a,b}(v) = u$.

1. Montrer que les réels 2 et 3 sont échangeables.
2. Qu'en est-il de 3 et 5 ?

3. Soit $u \leq v$ 2 entiers, déterminer une condition simple nécessaire et suffisante sur u et v pour que u et v soient échangeables.

Problème :

Partie I : Etude de la série harmonique

On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. **Divergence de (u_n) :**
   (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$.
   (c) Montrer que (u_n) ne converge pas vers une limite finie.
2. On définit les suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ par $a_n = u_n - \ln(n+1)$ et $b_n = u_n - \ln n$.
   (a) Montrer que $\forall x \in]-1, +\infty[, \ \ln(1+x) \leq x$.
   (b) En déduire que
   $$\forall n \in \mathbb{N}*, \quad \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$
   (c) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont monotones.
   (d) Etudier le signe de $a_n - b_n$ et en déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont bornées.
   (e) Justifier que la suite (a_n) (respectivement (b_n)) converge vers $\ell_a \in \mathbb{R}$ (respectivement $\ell_b \in \mathbb{R}$).
   (f) Montrer que $\ell_a = \ell_b$.

   Partie II : Etude d'une limite de somme

   On définit les suites $(w_n)_{n\geq 1}$ et $(S_n)_{n\geq 1}$ par
   $$w_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{w_n}.$$
   (a) Énoncer et démontrer la forme réduite de w_n.
   (b) Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$, tel que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}.$$
   (c) Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = u_{2n} - \frac{1}{2}u_n - 1 + \frac{1}{2n+1}.$$
   (d) Exprimer S_n en fonction de u_n, u_{2n} et n.
   (e) Exprimer S_n en fonction de b_n, b_{2n} et n.
   (f) Montrer que la suite (S_n) converge vers une limite que l'on explicitera.