Devoir surveillé 1

Exercice 1.

1. En reformulant la somme, on a

$$\begin{aligned} A_n = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i}{j} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} i \quad (j \text{ est indépendant de } i.) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\frac{j(j+1)}{2} \quad \text{(formule usuelle)} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{(j+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right) = \frac{n(n+3)}{4} \end{aligned}$$

On conclut donc $\boxed{A_n = \frac{n(n+3)}{4}}$. On remarque que les entiers n et $n+3$ sont de parité différentes, donc le produit $n(n+3)$ est un entier pair. Il en résulte que $2n(n+3)$ est toujours divisible par 4, $2A_n$ est un nombre entier pour tout n. Puis $A_2 = \frac{5}{2}$, donc l'entier $q = 1$ ne convient pas, on conclut donc

$$\boxed{q = 2 \text{ est le plus petit entier strictement positif tel que } qA_n \text{ est un nombre entier pour tout entier } n.}$$

2. (a) On expérimente quelques valeurs et on conjecture que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (a-1)u_n = a^{2^{n+1}} - 1$.
Montrons ce résultat par récurrence.
Initialisation
Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 + a$, donc $(a-1)u_0 = a^2 - 1$ et $a^{2^{0+1}} - 1 = a^2 - 1$. La propriété est donc initialisée.
Hérédité :
Supposons qu'à un rang n fixé, on a

$$(a-1)u_n = a^{2^{n+1}} - 1.$$

On a alors

$$\begin{aligned} (a-1)u_{n+1} &= (a-1)\prod_{k=0}^{n+1}\left(1+a^{\left(2^k\right)}\right) \\ &= \left((a-1)\prod_{k=0}^{n}\left(1+a^{\left(2^k\right)}\right)\right)(1+a^{2^{n+1}}) \\ &= (a-1)u_n\left(1+a^{2^{n+1}}\right) \\ &= \left(a^{2^{n+1}}-1\right)\left(a^{2^{n+1}}+1\right) \\ &= \left(\left(a^{2^{n+1}}\right)^2-1\right) = \left(a^{2^{n+2}}-1\right) \end{aligned}$$

La propriété est donc vrai au rang $n+1$.
On conclut donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad (a-1)u_n = a^{2^{n+1}} - 1.}$$

(b) Pour $a \neq 1$, la question précédente nous permet d'écrire

$$u_n = \frac{a^{2^{n+1}} - 1}{a - 1}.$$

Puis si $a = 1$, on obtient

$$u_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + 1) = 2^{n+1}.$$

On conclut donc

$$\boxed{u_n = \begin{cases} \frac{a^{2^{n+1}}-1}{a-1} & \text{si } a \neq 1 \\ 2^{n+1} & \text{si } a = 1. \end{cases}}$$

(c) Si $a = 1$, la suite ne converge pas vers une limite finie, car $2^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Si $|a| < 1$, par les suites géométriques, on a $a^{2^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, la suite (u_n) converge donc vers $\frac{-1}{a-1}$.

Si $|a| > 1$, la suite ne converge pas vers une limite finie, car $a^{2^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Si $a = -1$, on a directement $a^{2^{n+1}} - 1 = 0$ pour tout entier n et donc (u_n) converge vers 0, car identiquement nul.

On conclut donc

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers une limite finie si et seulement si } a \in [-1, 1[\ . \\ \text{Cette limite est } \frac{1}{1-a} \text{ si } a \in]-1, 1[\text{ et } 0 \text{ si } a = -1.\end{array}}$$

Exercice 2.

Appliquons la méthode du pivot.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & - & y & + & z & = & 4 \\ 3x & + & 3y & - & z & = & 4a \\ (2-a)x & + & 2y & - & 2z & = & -2b \end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1 \\ L_4\leftarrow L_4-2L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 2 \\ 3x & & & & & = & 6 \\ x & + & 2y & & & = & 4a-2 \\ (-2-a)x & & & & & = & -2b-4 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ L_3\leftarrow L_3-\frac{1}{3}L_2 \\ L_4\leftarrow L_4+\frac{2+a}{3}L_2}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcc} 2x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & & & & & = & 2 \\ & & 2y & & & = & 4a-4 \\ & & & & 0 & = & -2b-4+2(2+a) = -2b+2a \end{array}\right.$$

La dernière ligne n'est compatible que si $a = b$ et on conclut que

$$\boxed{\text{Le système a une unique solution } (2, 2a-2, 2a) \text{ si } a = b \text{ et le système n'a aucune solution si } a \neq b.}$$

Exercice 3. Les quantités $x+3$, $2x+3$ et $x-1$ s'annulent respectivement en -3,$-\frac{3}{2}$,1, on en déduit le tableau suivant

x	$-\infty$ -3	$-\frac{3}{2}$	1	$+\infty$
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$
$\lvert 2x+3\rvert$	$-2x-3$	$-2x-3$	$2x+3$	$2x+3$
$\lvert x+3\rvert$	$-x-3$	$x+3$	$x+3$	$x+3$
$-\lvert x+3\rvert + \lvert 2x+3\rvert - 2\lvert x-1\rvert$	$x-2$	$-x-8$	$3x-2$	$-x+2$

On traite alors chaque intervalle :

(i) Si $x \in]-\infty, -3]$, il faut $x - 2 \leq -1$, soit $x \leq 1$. On a donc $x \in]-\infty, -3]$.

(ii) Si $x \in [-3, -\frac{3}{2}]$, il faut $-x - 8 \leq -1$, soit $-7 \leq x$. On a donc $x \in [-3, -\frac{3}{2}]$.

(iii) Si $x \in [-\frac{3}{2}, 1]$, il faut $3x - 2 \leq -1$, soit $x \leq \frac{1}{3}$. On a donc $x \in [-\frac{3}{2}, \frac{1}{3}]$.

(iv) Si $x \in [1, +\infty[$, il faut $-x + 2 \leq -1$. On a donc $x \in [3, +\infty[$.

On conclut donc que l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, -3] \cup [-3, -\tfrac{3}{2}] \cup [-\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{3}] \cup [3, +\infty[=]-\infty, \tfrac{1}{3}] \cup [3, +\infty[.}$$

Exercice 4.

1. Raisonnons par analyse-synthèse :
   Analyse :
   Supposons qu'il existe (a, b) tel que

   $$f_{a,b}(2) = 3 \text{ et } f_{a,b}(3) = 2.$$

   On a donc

   $$\begin{cases} a - \sqrt{b+2} = 3 \\ a - \sqrt{b+3} = 2, \end{cases}$$

   on en déduit donc

   $$\begin{cases} b + 2 = (3-a)^2 \\ b + 3 = (2-a)^2 \end{cases}$$

   On a donc $(3-a)^2 - 2 = (2-a)^2 - 3$, soit $a^2 - 6a + 7 = a^2 - 4a + 1$ donc $a = 3$ puis $b = -2$ en utilisant la première équation.
   Synthèse :
   On vérifie bien que

   $$f_{3,-2}(2) = 3 - \sqrt{-2+2} = 3 \quad \text{et} \quad f_{3,-2}(3) = 3 - \sqrt{-2+3} = 2.$$

   On conclut

   $$\boxed{\text{2 et 3 sont échangeables.}}$$

2. Pour 3 et 5, l'analyse devient

   $$\begin{cases} a - \sqrt{b+3} = 5 \\ a - \sqrt{b+5} = 3, \end{cases}$$

   on en déduit donc

   $$\begin{cases} b + 3 = (5-a)^2 \\ b + 5 = (3-a)^2 \end{cases}$$

   On a donc $(5-a)^2 - 3 = (3-a)^2 - 5$, soit $a^2 - 10a + 22 = a^2 - 6a + 4$ donc $a = \frac{9}{2}$ puis $b = -\frac{11}{4}$ en utilisant la première équation.
   Synthèse :
   On remarque que

   $$f_{\frac{9}{2},-\frac{11}{4}}(3) = \frac{9}{2} - \sqrt{-\frac{11}{4} + 3} = 4 \neq 5.$$

   On conclut

   $$\boxed{\text{3 et 5 ne sont pas échangeables.}}$$

3. **Analyse :** Supposons u et v échangeables, il existe donc a, b réels tel que

   $$\begin{cases} a - \sqrt{b+u} = v \\ a - \sqrt{b+v} = u, \end{cases}$$

De manière similaire au question précédente, on obtient

$$\begin{cases} b+u=(v-a)^2 \\ b+v=(u-a)^2 \end{cases}$$

Puis $a^2-2va+v^2-u=a^2-2ua+u^2-v$, soit $2(u-v)a=u^2-v^2+u-v=(u-v)(u+v+1)$.
Supposons dans premier temps $u \neq v$, on a donc $a=\frac{u+v+1}{2}$.

On injecte dans le première et on obtient $b=\left(\dfrac{v-u-1}{2}\right)^2-u$.

Synthèse :

Supposons $a=\frac{u+v+1}{2}$ et $b=\left(\dfrac{v-u-1}{2}\right)^2-u$. On a

$$f_{a,b}(u)=\frac{u+v+1}{2}-\sqrt{\left(\frac{v-u-1}{2}\right)^2-u+u}=\frac{u+v-1}{2}-\sqrt{\left(\frac{v-u-1}{2}\right)^2}.$$

Par positivité comme u,v entiers différents et $u \leq v$, on en déduit $v-u \geq 1$ puis

$$f_{a,b}(u)=\frac{u+v+1}{2}-\frac{v-u-1}{2}=u+1.$$

On trouve donc en synthèse comme condition nécessaire pour que $u<v$ soient 2 entiers échangeables $v=u+1$. On a alors $a=u+1$ et $b=-u$.
On vérifie bien que

$$f_{u+1,-u}(u)=u+1 \quad \text{et} \quad f_{u+1,-u}(u+1)=u.$$

On conclut donc que

$$\boxed{u,v \text{ 2 entiers distincts sont échangeables si et seulement si ils sont consécutif.}}$$

Il reste le cas où $u=v$, un entier est-il échangeable avec lui-même. Il faut trouver a,b tel que

$$u=a-\sqrt{b+u}.$$

Il suffit de prendre $a=u$ et $b=-u$.
On regroupe donc et on obtient

$$\boxed{u,v \text{ 2 entiers sont échangeables si et seulement si ils sont consécutif ou si ils sont égaux.}}$$

Problème :

1. **Divergence de (u_n) :**
   (a) On calcule $u_{n+1}-u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n+1}\geq 0$. On conclut donc

   $$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$$

   (b) On a

   $$\begin{aligned} u_{2n}-u_n &= \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} \end{aligned}$$

   On remarque de plus que

   $$\forall k \in [\![n+1,2n]\!], \quad \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}.$$

   Il en résulte que

   $$u_{2n}-u_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n}=n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

   Il en résulte que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2n} - u_n \geq \tfrac{1}{2}.}$$

(c) Supposons que (u_n) converge vers une limite finie ℓ, on a donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ puis par opérations ur les limites, $u_{2n} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On obtient donc une contradiction avec l'inégalité de la question précédente. On conclut

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

2. On définit les suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ par $a_n = u_n - \ln(n+1)$ et $b_n = u_n - \ln n$.

(a) On étudie la fonction φ définie sur $]-1,+\infty[$ par $\varphi(x) = -\ln(x+1) + x$. On a $\varphi'(x) = -\frac{1}{x+1} + 1 = \frac{x}{x+1} \geq 0$ pour $x \geq 0$.

x	-1	0	$+\infty$
$\varphi(x)$	↘	0	↗

,

Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin dans l'étude, le tableau donne

$$\boxed{\forall x \in]-1+\infty[,, \quad -\ln(1+x) + x \geq 0.}$$

(b) En appliquant, le résultat de la question précédente à $x = \frac{1}{n+1}$ qui est bien positif, on a

$$\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1}.$$

Pour l'autre, on remarque que pour $x = -\frac{1}{n+1}$, on a

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{n+1},$$

soit

$$\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{n+1}.$$

En multipliant par -1 et en utilisant les propriétés du logarithme, on a

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \geq \frac{1}{n+1}.$$

On conclut donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).}$$

(c) On calcule

$$a_{n+1} - a_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n+1) = -\left(\frac{n+2}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1} \geq 0,$$

grâce à la question précédente. On a donc $\boxed{\text{la suite } (a_n) \text{ est croissante.}}$ De même, on calcule

$$b_{n+1} - b_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) = -\left(\frac{n+1}{n}\right) + \frac{1}{n+1} \leq 0,$$

grâce à la question précédente. On a donc $\boxed{\text{la suite } (b_n) \text{ est décroissante.}}$

(d) On calcule

$$a_n - b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) = \ln(n) - \ln(n+1) \leq 0,$$

par croissance de la fonction ln. On a donc

$$\forall n, \quad a_n \leq b_n.$$

Grâce à la monotonie des suites (a_n) et b_n, on en déduit

$$\forall n, \quad a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0.$$

On conclut

$$\boxed{\text{les suites } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont bornées.}}$$

(e) La suite (a_n) est croissante majorée par b_0, elle converge. La suite (b_n) est décroissante minorée par a_0, elle converge.
On conclut

$$\boxed{\text{la suite } (a_n) \text{ (respectivement } (b_n)\text{) converge vers } \ell_a \in \mathbb{R} \text{ (respectivement } \ell_b \in \mathbb{R}\text{).}}$$

(f) On a montré que les suites (a_n) et (b_n) convergent et de plus

$$a_n - b_n = \ln(n) - \ln(n+1) = -\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

car $\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. On conclut

$$\boxed{\ell_a = \ell_b.}$$

3. On a $w_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Pour la démonstration, écrire proprement la récurrence.
4. En regroupant, tout au même dénominateur, on obtient

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1} = \frac{(2a+2b+c)n^2 + (3a+b+c)n + a}{n(n+1)(2n+1)}.$$

Pour que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1},$$

il suffit donc que $(2a+2b+c) = 0$, $(3a+b+c) = 0$ et $a = 1$, on résout et on trouve $a = b = 1$ et $c = -4$.
On conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \tfrac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n+1} - \tfrac{4}{2n+1}.}$$

5. Première méthode, par récurrence, un peu lourd, mais cela marche.
Seconde méthode :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}}_{\text{(tous les termes de la forme } \frac{1}{k} \text{ pour } k \text{ comprise entre 2 et } 2n+1.)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \\
&= \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} - 1 \\
&= u_{2n} - \frac{1}{2}u_n - 1 + \frac{1}{2n+1}.
\end{aligned}$$

On conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = u_{2n} - \frac{1}{2}u_n - 1 + \frac{1}{2n+1}.}$$

6. En utilisant la question 3, on a
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{k(k+1)(2k+1)}.$$
Utilisant les question 3 et 4, on en déduit
$$\begin{aligned}
S_n &= 6\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} - \frac{4}{2k+1} \\
&= 6\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 6\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - 24\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} \\
&= 6u_n + 6\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{n+1}\right) - 24\left(u_{2n} - \frac{1}{2}u_n - 1 + \frac{1}{2n+1}\right) \\
&= -24u_{2n} + 24u_n + 18 + \frac{6}{n+1} + \frac{1}{2n+1}
\end{aligned}$$
On conclut
$$\boxed{S_n = -24u_{2n} + 24u_n + 18 + \tfrac{6}{n+1} + \tfrac{1}{2n+1}.}$$

7. En utilisant la question précédente, on a
$$\begin{aligned}
S_n &= -24u_{2n} + 24u_n + 18 + \frac{6}{n+1} + \frac{1}{2n+1} \\
&= -24(u_{2n} - \ln(2n)) + 24(u_n - \ln n) + 18 + \frac{6}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + 24(\ln(n) - \ln(2n)) \\
&= -24a_{2n} + 24a_n + 18 - 24\ln 2 + \frac{6}{n+1} + \frac{1}{2n+1}.
\end{aligned}$$
On a donc
$$\boxed{S_n = -24a_{2n} + 24a_n + 18 - 24\ln 2 + \tfrac{6}{n+1} + \tfrac{1}{2n+1}.}$$

8. Comme $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_a$, $a_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_a$ et $\frac{6}{n+1} + \frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on conclut
$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 18 - 24\ln 2.}$$