Devoir surveillé 1

Exercice 1.

1. On propose 2 méthodes :
Première méthode :
Étudions la fonction f définie par $f(x) = \arctan(x+1) - \arctan(x) - \arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)$. La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ par les règles de compositions usuelles et on a

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \dfrac{1}{1+(1+x)^2} - \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)^2} \cdot \left(\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\right) \\ & = & \dfrac{1}{1+(1+x)^2} - \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2+1} \\ & = & \dfrac{1}{2+2x+x^2} - \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{2x+1}{x^4+2x^3+4x^2+2x+2} \quad \text{(En développant)} \\ & = & \dfrac{-2x-1}{x^4+2x^3+4x^2+2x+2} + \dfrac{2x+1}{x^4+2x^3+4x^2+2x+2} \quad \text{(En regroupant)} \\ & = & 0 \end{array}$$

Comme $\mathbb{R}^+$ est un intervalle et que la fonction f est de dérivée nulle, la fonction est donc constante égale à sa valeur en 0, or $f(0) = 0$. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \arctan(x+1) - \arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) = 0.$$

Seconde méthode :
Composons par la tangente chacun des membres, on a

$$\begin{array}{rcl} \tan\left(\arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)\right) & = & \dfrac{1}{x^2+x+1} \\ \tan\left(\arctan(x+1) - \arctan(x)\right) & = & \dfrac{\tan(\arctan(x+1)) - \tan(\arctan(x))}{1+\tan(\arctan(x+1))\tan(\arctan(x))} \\ & = & \dfrac{x+1-x}{1+(x+1)x} = \dfrac{1}{x^2+x+1} \end{array}$$

On en déduit que

$$\arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) - \arctan(x+1) + \arctan(x) \equiv 0 \quad [\pi].$$

Comme arctan est une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a donc

$$\arctan(x+1) - \arctan(x) \in [0, \pi[,$$

de plus, on a $x^2+x+1 > 0$, car aucune racine réelle et coefficient dominant positif, d'où

$$\arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) \in [0, \frac{\pi}{2}[.$$

Il en résulte

$$\arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) - \arctan(x+1) + \arctan(x) \in]-\pi; \frac{\pi}{2}[,$$

d'où seule possibilité $\arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right) - \arctan(x+1) + \arctan(x) = 0$.
On conclut donc que

$$\boxed{x \in \mathbb{R}^+,\ \arctan(x+1) - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right).}$$

2. Grâce à la question précédente, on a

$$\begin{aligned} u_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \arctan(k+1) - \arctan(k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \arctan(k+1) - \sum_{k=0}^{n} \arctan(k) \\ &= \arctan(n+1) - \arctan(0) = \arctan(n+1) \end{aligned}$$

On conclut

$$\boxed{\lim_n u_n = \tfrac{\pi}{2}.}$$

Exercice 2.

1. On calcule la dérivée de f et on obtient

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{3}{1+(x+2)^2} = \frac{1+(x+2)^2-3-3x^2}{(1+x^2)(1+(x+2)^2)} = \frac{-2x^2+4x+2}{(1+x^2)(1+(x+1)^2)}$$

On obtient 2 racines $1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$, soit le tableau de variation

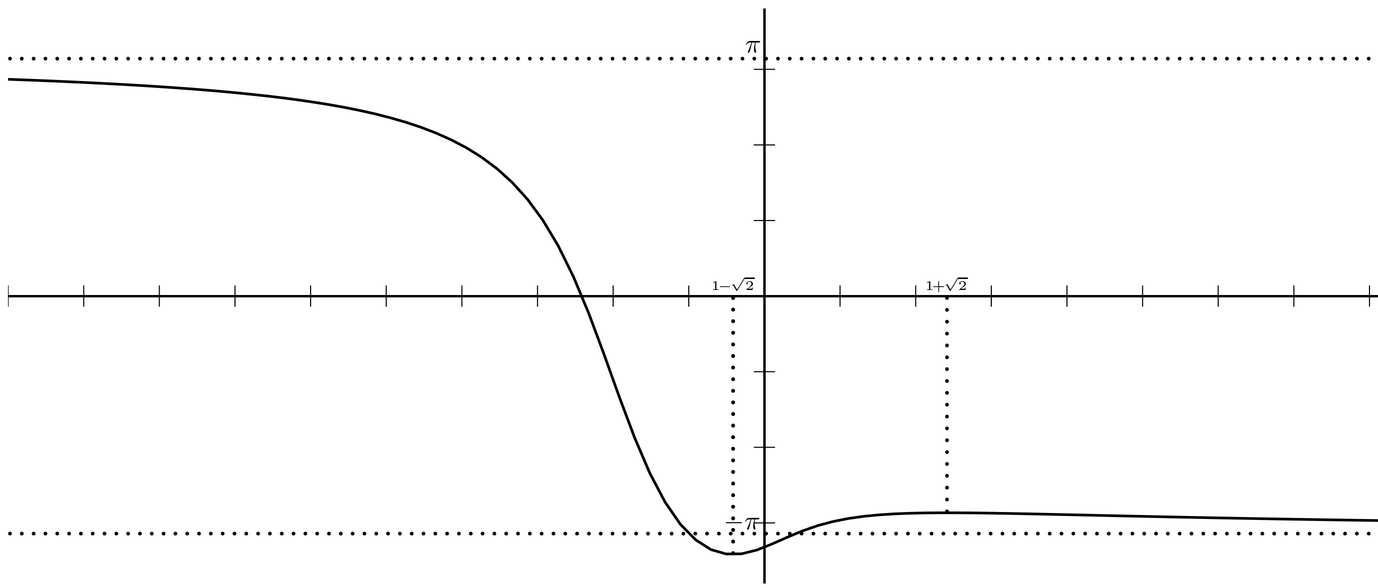
x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	π	$\searrow$	$f(1-\sqrt{2})$	$\nearrow$	$f(1+\sqrt{2})$	$\searrow$	$-\pi$

Les limites ne sont pas indéterminées et on remarque que la courbe de f possède 2 asymptotes horizontales $y=\pi$ en $-\infty$ et $y=-\pi$ en $+\infty$

2. On a $f(0) = -3\arctan(2)$ et $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$. Comme $\sqrt{3} < 2$ par stricte croissance de la fonction arctan, on a $\frac{\pi}{3} = \arctan(\sqrt{3}) < \arctan(2)$, soit $\pi < 3\arctan(2) = -f(0)$ et on conclut

$$\boxed{|f(0)| > \pi.}$$

3. On trace



4. Le formulaire trigonométrique nous donne
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$
On en déduit
$$\tan(3x) = \frac{\tan x + \tan(2x)}{1 - \tan x \tan 2x}$$
puis
$$\tan(3x) = \frac{\tan x + 2\frac{\tan x}{1-\tan^2 x}}{1 - 2\frac{\tan^2 x}{1-\tan^2 x}}.$$
On conclut après simplification
$$\boxed{\tan(3x) = \frac{-\tan^3(x)+3\tan x}{1-3\tan^2(x)}.}$$

5. Par lecture du tableau de variation comme $f(1-\sqrt{2}) < f(0) < -\pi$, on en déduit que l'équation $f(x) = -\pi$ possède 2 solutions.
Analyse : En composant l'équation $f(x) = -\pi$ par tan, on obtient
$$\tan(\arctan(x) - 3\arctan(2+x)) = 0,$$
or
$$\arctan(x) - 3\arctan(2+x)) = \frac{x - \tan(3\arctan(x+2))}{1 + x\tan(3\arctan(x+2))}.$$
Grâce à la question précédente, on
$$\tan(3\arctan(x+2)) = \frac{-(x+2)^3 + 3(x+2)}{1 - 3(x+2)^2}.$$
En regroupant, on obtient donc
$$\frac{x - \frac{-(x+2)^3+3(x+2)}{1-3(x+2)^2}}{1 + x\frac{-(x+2)^3+3(x+2)}{1-3(x+2)^2}} = 0.$$
En simplifiant, on obtient
$$\frac{2(x^3+3x^2+x-1)}{x^4+6x^3+12x^2+14x+11} = 0.$$
Les racines de $x^3+3x^2+x-1 = 0$ sont donc des racines potentielles. On remarque que -1 est racine évidente et on a
$$x^3+3x^2+x-1 = (x+1)(x^2+2x-1).$$
On obtient donc trois racines potentielles : -1, $-1-\sqrt{2}$ et $-1+\sqrt{2}$.
Synthèse :
L'étude de la fonction nous a permis d'obtenir l'existence d'exactement 2 racines, il faut donc en exclure une.
Comme $2-1-\sqrt{2} = 1-\sqrt{2} < 0$, on a $-3\arctan(1-\sqrt{2}) > 0$ et de plus $\arctan(-1-\sqrt{2}) > -\frac{\pi}{2}$, on a donc $f(-1-\sqrt{2}) > -\frac{\pi}{2}$.
Il en résulte que $-1-\sqrt{2}$ n'est pas une solution de $f(x) = -\pi$ et on conclut que
$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = -\pi \text{ a exactement deux solutions } -1 \text{ et } -1+\sqrt{2}.}$$

Exercice 3.

1. Si $z_0 = 0$, la suite est constante égale à 0. Si $z_0 \in \mathbb{R}_-^*$, alors $z_1 = 0$ et après la suite est constante. Enfin, si $z_0 \in \mathbb{R}_+^*$, la suite sera constante.
2. (a) On a :
$$z_{n+1} = \frac{1}{2}(\rho_n e^{i\theta_n} + \rho_n) = \frac{e^{i\theta_n/2}}{2}(e^{i\theta_n/2} + e^{-i\theta_n/2})\rho_n = \cos\frac{\theta_n}{2}\rho_n e^{i\theta_n/2}.$$
Mais $\cos\frac{\theta_n}{2} \geq 0$: on en déduit que $\rho_{n+1} = \cos\frac{\theta_n}{2}\rho_n$, et qu'un argument de z_{n+1} est $\frac{\theta_n}{2}$. Puisque cet argument est dans $]-\pi/2, \pi/2]$, il s'agit de l'argument principal θ_{n+1}.

(b) Au vu des relations précédentes, on obtient par récurrence immédiate : $\theta_n = \frac{\theta_0}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. On peut même noter que tous les θ_n seront dans $]-\pi, 0] \cup]0, \pi[$, ce qui assurera que leur sinus est non nul.

(c) D'après les deux dernières questions, on a pour $n \geq 1$: $\rho_n = \cos \frac{\theta_0}{2^n} \rho_{n-1}$, de sorte que :

$$\rho_n = \cos \frac{\theta_0}{2^n} \cos \frac{\theta_0}{2^{n-1}} \cdots \cos \frac{\theta_0}{2} \rho_0.$$

Maintenant, on a :

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 4 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2} = 8 \sin \frac{x}{8} \cos \frac{x}{8} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2} = \cdots$$

et ainsi :

$$2^n \rho_n \sin \frac{\theta_0}{2^n} = \rho_0 \sin \theta_0.$$

Bien entendu, on pouvait éviter les « $\cdots$ » avec une micro-récurrence.

(d) On a :

$$\rho_n = \rho_0 \frac{\sin \theta_0}{2^n \sin \frac{\theta_0}{2^n}} = \rho_0 \frac{\frac{\theta_0}{2^n}}{\sin \frac{\theta_0}{2^n}} \frac{\sin \theta_0}{\theta_0}.$$

Puisque $\sin u \sim u$ et $\frac{\theta_0}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $\frac{\sin \frac{\theta_0}{2^n}}{\frac{\theta_0}{2^n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, de sorte que :

$$\rho_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \rho_0.$$

Exercice 4.

1. Si $P_n(z) = 0$, alors on a $(1+z)^n - 1 = 0$, soit $(1+z)^n = 1$. Il en résulte que $1+z$ est une racine n-ème de l'unité et il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $1 + z = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}$. D'où, en utilisant les formules d'Euler, $z = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1 = 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}$. Toutes les manipulations précédentes sont des équivalences, on peut donc conclure que P_n possède n racines distinctes

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \alpha_k = 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}.}$$

2. En utilisant la formule du binôme de Newton et un décalage d'indice, on a

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k - 1 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} X^k = X \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} X^k.$$

On conclut que

$$\boxed{P_n = XQ_n, \text{ avec } Q_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} X^k.}$$

3. Grâce à la formule de la question précédente, on obtient $Q_n(0) = \binom{n}{1} = n$. Puis grâce à la question 1, on a $n-1$ racines distinctes de Q_n :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad \alpha_k = 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}.$$

Comme Q_n est unitaire, en utilisant le résultat donné dans l'énoncé, on obtient

$$Q_n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}\right).$$

En évaluant en 0, on obtient

$$\begin{aligned} Q_n &= \prod_{k=1}^{n-1} \left(-2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}\right) \\ &= (-2i)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) \prod_{k=1}^{n-1} \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} \\ &= 2^{n-1}(-i)^{n-1} \mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{n-1} i\frac{k\pi}{n}} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

Or, de plus, on a

$$\sum_{k=1}^{n-1} i\frac{k\pi}{n} = i\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k = i\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2} = i\frac{\pi}{2}(n-1)$$

et

$$\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}(n-1)} = \left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{n-1} = i^{n-1}.$$

En regroupant, il en résulte

$$Q_n(0) = 2^{n-1}(-i)^{n-1}i^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 2^{n-1}(-i^2)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

En égalisant les 2 résultats, on obtient

$$n = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

et on conclut

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.}$$

Exercice 5.

1. En utilisant l'exponentielle complexe, on a

$$S_n(a,b) = \sum_{k=0}^{n}\cos(ak+b) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{i(ak+b)}\right).$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{i(ak+b)} &= \mathrm{e}^{ib}\sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{e}^{ia}\right)^k \\
&= \mathrm{e}^{ib}\frac{1-\left(\mathrm{e}^{ia}\right)^{n+1}}{1-\mathrm{e}^{ia}} \qquad (\text{si } \mathrm{e}^{ia}\neq 1) \\
\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{i(ak+b)} &= \mathrm{e}^{ib}\mathrm{e}^{i\frac{n}{2}a}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}a\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \qquad (\text{Formule d'Euler})
\end{aligned}$$

Si $\mathrm{e}^{ia}\neq 1$, on a donc

$$S_n(a,b) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\left(b+\frac{n}{2}a\right)}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}a\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}\right) = \cos\left(b+\frac{n}{2}a\right)\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}a\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}.$$

Si $\mathrm{e}^{ia} = 1$, on a alors $a\equiv 0[2\pi]$ et donc $S_n(a,b) = (n+1)\cos(b)$. On conclut

$$\boxed{S_n(a,b) = \begin{cases} \cos\left(b+\frac{n}{2}a\right)\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}a\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} & \text{si } a\not\equiv 0[2\pi] \\ (n+1)\cos(b) & \text{si } a\equiv 0[2\pi] \end{cases}}$$

2. En utilisant les formules d'Euler et le binôme de Newton, on a

$$\begin{aligned}
\cos(x)^{2p} &= \left(\frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^{2p} \\
&= \frac{1}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}\mathrm{e}^{ikx}\mathrm{e}^{-i(2p-k)x} \\
\cos(x)^{2p} &= \frac{1}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}\mathrm{e}^{i(2k-2p)x}
\end{aligned}$$

On remarque qu'à part le terme central ($k=p$), tous les termes vont par pairs et on obtient

$$\cos(x)^{2p} = \frac{1}{2^{2p}}\binom{2p}{p} + \frac{1}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\left(\mathrm{e}^{i(2k-2p)x} + \mathrm{e}^{-i(2k-2p)x}\right)$$

Soit en utilisant à nouveau les formules d'Euler

$$\boxed{\cos(x)^{2p} = \frac{1}{2^{2p}}\binom{2p}{p} + \frac{1}{2^{2p-1}}\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\cos\left((2p-2k)x\right).}$$

3. En utilisant le résultat de la question précédente (en changeant le nom de la variable muette), on a

$$\sum_{k=0}^{2p-1}\cos^{2p}\left(x+k\frac{\pi}{2p}\right) = \sum_{k=0}^{2p-1}\left(\frac{1}{2^{2p}}\binom{2p}{p} + \frac{1}{2^{2p-1}}\sum_{j=0}^{p-1}\binom{2p}{j}\cos\left((2p-2j)(x+k\frac{\pi}{2p})\right)\right).$$

Comme le premier terme sous le signe somme est constant, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{2p-1}\cos^{2p}\left(x+k\frac{\pi}{2p}\right) = \frac{2p}{2^{2p}}\binom{2p}{p} + \frac{1}{2^{2p-1}}\sum_{k=0}^{2p-1}\sum_{j=0}^{p-1}\binom{2p}{j}\cos\left((2p-2j)(x+k\frac{\pi}{2p})\right).$$

En échangeant les signes, on a

$$\sum_{k=0}^{2p-1}\sum_{j=0}^{p-1}\binom{2p}{j}\cos\left((2p-2j)(x+k\frac{\pi}{2p})\right) = \sum_{j=0}^{p-1}\binom{2p}{j}\sum_{k=0}^{2p-1}\cos\left((2p-2j)(x+k\frac{\pi}{2p})\right).$$

Calculons $\displaystyle\sum_{k=0}^{2p-1}\cos\left((2p-2j)(x+k\frac{\pi}{2p})\right)$.
On remarque

$$(2p-2j)(x+k\frac{\pi}{2p}) = k\frac{(2p-2j)\pi}{2p} + (2p-2j)x,$$

on peut donc appliquer le résultat de la question 1 avec $a=\frac{(2p-2j)\pi}{2p}$,$b=(2p-2j)x$ et $n=p-1$.
Comme $j\in[\![0,p-1]\!]$, on a $(j-p)\in[\![1,p]\!]$ et on en déduit que $\frac{(2p-2j)\pi}{2p}\in]0,\pi]$, soit $a\not\equiv 0[2\pi]$.
Il en résulte

$$\sum_{k=0}^{2p-1}\cos\left((2p-2j)(x+k\frac{\pi}{2p})\right) = \cos\left((2p-2j)x + \frac{2p-1}{2}\cdot\frac{(2p-2j)\pi}{2p}\right)\frac{\sin\left((2p-2j)\pi\right)}{\sin\left(\dfrac{(2p-2j)\pi}{4p}\right)} = 0.$$

On a donc pout tout $j\in[\![0,p-1]\!]$,

$$\sum_{k=0}^{2p-1}\cos\left((2p-2j)(x+k\frac{\pi}{2p})\right) = 0.$$

On conclut donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{2p-1}\cos^{2p}\left(x+k\frac{\pi}{2p}\right) = \frac{p}{2^{2p-1}}\binom{2p}{p}.}$$