Devoir de Mathématiques 3 : corrigé

Exercice 1. Étude d'une fonction en notation puissance

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = x^x = e^{x\ln(x)}$$

La fonction fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de $x \mapsto x\ln(x)$ (produit de fonctions usuelles) dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et exp dérivable sur $\mathbb{R}$. Nous avons alors :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = (\ln(x)+1)e^{x\ln(x)}$$

Étudions le signe de $f'(x)$.

$$f'(x) > 0 \iff \ln(x)+1 > 0 \iff x > e^{-1}$$

Nous obtenons le tableau de variations :

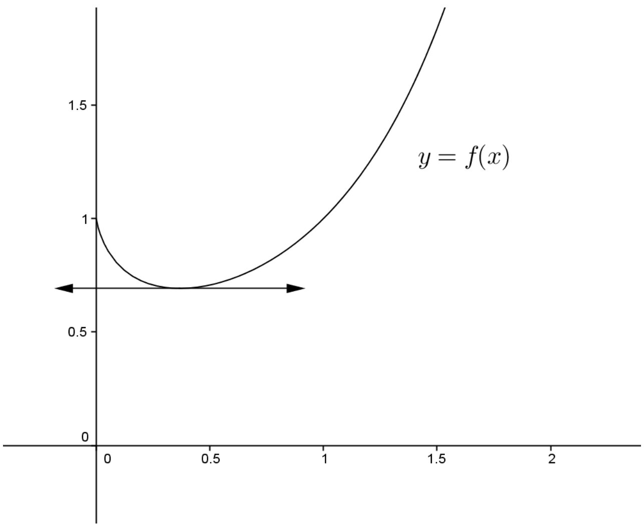
x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$f(e^{-1})$	$\nearrow$	$+\infty$

Les limites aux bornes se justifient ainsi :

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0 \text{ par croissance comparée usuelle, donc par composition } \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(x)} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln(x)} = +\infty \text{ sans difficulté.}$$

Nous obtenons l'allure du graphe :



Exercice 2. Un problème de Cauchy

La question 3 peut-être abordée même sans avoir traité les précédentes.

1. On vérifie par un simple calcul que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

Donc :

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2} = \beta}$$

On peut en déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ (par exemple sur l'intervalle $I =]-1, 1[$) :

$$\boxed{x \mapsto \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)}$$

2. Pour tout $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on pose :

$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{\cos(\theta)} \mathrm{d}\theta$$

On considère le changement de variable $x = \sin(\theta)$. Nous avons donc :

$$\mathrm{d}x = \cos(\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$\theta = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad \text{et} \quad \theta = t \Longrightarrow x = \sin(t)$$

Nous obtenons :

$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{\cos^2(\theta)} \cos(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^t \frac{1}{1-\sin^2(\theta)} \cos(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\sin(t)} \frac{1}{1-x^2} \mathrm{d}x$$

Avec la question précédente on trouve donc :

$$\boxed{F(t) = \left[\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)\right]_0^{\sin(t)} = \ln\left(\sqrt{\frac{1+\sin(t)}{1-\sin(t)}}\right)}$$

3. On résout sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ le problème suivant :

$$\begin{cases} y' = -y\tan(t) + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Il s'agit de résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1, résolue en y'.

- **Équation homogène.** La fonction $t \mapsto \tan(t)$ est continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et admet pour primitive $\ln(\cos)$. D'après un théorème du cours l'ensemble des solutions sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de l'équation $y' = -y\tan(t)$ est :

$$\left\{t \mapsto \lambda\, e^{\ln(\cos(t))}, \lambda \in \mathbb{R}\right\},$$

ou encore :

$$\boxed{\{t \mapsto \lambda \cos(t), \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

- **Solution particulière.** En cherchant une solution sous la forme $y(t) = \varphi(t)\cos(t)$ avec φ dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on obtient la CNS :

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\cos(t)}$$

La question précédente nous donne une expression pour φ ainsi qu'une solution particulière :

$$y(t) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+\sin(t)}{1-\sin(t)}}\right)\cos(t)$$

- **Conclusion.** L'ensemble des solutions sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de l'équation différentielle est :

$$\boxed{\left\{t \mapsto \left(\lambda + \ln\left(\sqrt{\frac{1+\sin(t)}{1-\sin(t)}}\right)\right)\cos(t), \lambda \in \mathbb{R}\right\}}$$

Avec la condition initiale il vient $\lambda = 0$ ainsi que l'unique solution sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$\boxed{t \mapsto \ln\left(\sqrt{\frac{1+\sin(t)}{1-\sin(t)}}\right)\cos(t)}$$

Exercice 3. Équations différentielles du second ordre

Dans cet exercice on étudie deux équations différentielles du second ordre.

1. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} y'' + 3y = e^t + 1 \quad (E) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

(a) **Résolution de l'équation homogène associée** (E_0) $y'' + 3y = 0$.
L'équation (E_0) admet pour équation caractéristique :

$$X^2 + 3 = 0$$

Les racines sont $r_1 = i\sqrt{3}$ et $r_2 = -i\sqrt{3}$. Nous avons l'ensemble des solutions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathscr{S}_0 = \left\{t \mapsto \lambda\cos(\sqrt{3}t) + \mu\sin(\sqrt{3}t),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

(b) **Détermination d'une solution particulière.** On détermine une solution particulière pour les équations :

$$(E_1) \quad y'' + 3y = e^t \qquad \text{et} \qquad (E_2) \quad y'' + 3y = 1$$

- ⋆ Pour (E_1), on cherche une solution particulière de la forme $y_1(t) = ae^t$.
Nous avons alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_1'(t) = y_1''(t) = ae^t$; ainsi

$$(a + 3a)e^t = e^t \quad \text{donc} \quad a = \frac{1}{4}$$

- ⋆ Pour (E_2), on cherche une solution particulière de la forme $y_2(t) = b$.
Nous avons alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_2'(t) = y_2''(t) = 0$; ainsi

$$3b = 1 \quad \text{donc} \quad b = \frac{1}{3}$$

Par *principe de superposition* $y = y_1 + y_2$ est une solution de (E).

(c) **Ensemble de toutes les solutions de** (E)**.** Nous avons l'ensemble des solutions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{t \mapsto \lambda\cos(\sqrt{3}t) + \mu\sin(\sqrt{3}t) + \frac{e^t}{4} + \frac{1}{3},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

- **Conditions initiales.** Soit $y \in \mathscr{S}$ telle que $y(0)=0$ et $y'(0)=0$.
  Pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$y(t) = \lambda\cos(\sqrt{3}t) + \mu\sin(\sqrt{3}t) + \frac{e^t}{4} + \frac{1}{3}$$
$$y'(t) = -\lambda\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) + \mu\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) + \frac{e^t}{4}$$
  Comme $y(0)=0$, nous avons
$$\lambda + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = 0.$$
  Comme $y'(0)=0$, nous avons
$$\mu\sqrt{3} + \frac{1}{4} = 0$$
  Il vient donc l'unique solution :
$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & -\frac{7}{12}\cos(\sqrt{3}t) - \frac{\sqrt{3}}{12}\sin(\sqrt{3}t) + \frac{e^t}{4} + \frac{1}{3} \end{array}}$$

2. Déterminons l'ensemble des solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle :
$$y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$$
   Nous procédons de la même manière que dans la question précédente.
   (a) **Résolution de l'équation homogène associée** (E_0) $\;y'' + 2y' + y = 0$.
   L'équation (E_0) admet pour équation caractéristique :
$$X^2 + 2X + 1 = 0$$
   Il y a une racine double $r_0 = -1$. Nous avons l'ensemble des solutions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$:
$$\boxed{\mathscr{S}_0 = \left\{t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{-t},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$
   (b) **Détermination d'une solution particulière.** Vu le second membre on cherche une solution particulière de la forme $y(t) = a_2 t^2 e^{-t}$.
   Nous avons alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = a_2(2t - t^2)e^{-t}$ et $y''(t) = a_2(2 - 4t + t^2)e^{-t}$; ainsi en identifiant on obtient :
$$a_2 = 1 \text{ et la solution particulière } t \mapsto t^2 e^{-t}$$
   (c) **Ensemble de toutes les solutions de** (E)**.** Nous avons l'ensemble des solutions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$:
$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{t \mapsto (t^2 + \lambda t + \mu)e^{-t},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

Problème 1. Variations autour d'une fonction

Partie A. Étude de la fonction

1. **Questions de cours.** Vu en cours.

On considère la fonction f définie par
$$f(t) = \arccos\left(\frac{1-t}{1+t}\right).$$

2. Le plus simple est d'étudier la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1-t}{1+t}$. La fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $g'(t) = \dfrac{-2}{(1+t)^2}$. Son tableau de variations est :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
g	$-1 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow -1$

Comme $f(0) = 1$ on voit d'après le tableau de variations que

$$\frac{1-t}{1+t} \in [-1,1] \text{ si et seulement si } t \in \mathbb{R}_+$$

La fonction arccos est définie sur $[-1,1]$. Donc d'après la question précédente f est définie sur $\mathbb{R}_+$.

3. **Étude de la dérivabilité et réécriture de f.**

   (a) La fonction arccos est dérivable sur $]-1,1[$. Lorsque $t \in \mathbb{R}_+$ nous avons $\dfrac{1-t}{1+t} = \pm 1$ si et seulement si $t = 0$. En conclusion f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{-2}{(1+t)^2} \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{(1+t)^2} \frac{1}{\sqrt{\dfrac{t}{(1+t)^2}}} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(t) = \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}}}$$

   (b) La fonction $h : t \mapsto 2\arctan(\sqrt{t})$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme composée de la fonction racine carrée dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et de la fonction arctan dérivable sur $\mathbb{R}$) ; sa dérivée est

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t^2})} = \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}$$

   (c) La dérivée de la fonction précédente coïncide donc avec f'. Sur l'intervalle $]0,+\infty[$ les deux fonctions coïncident à une constante près. En remarquant que $f(1) = \frac{\pi}{4} = h(1)$ nous obtenons bien l'égalité de ces deux fonctions sur $]0,+\infty[$. En vérifiant qu'elles sont égales en 0 : nous obtenons l'égalité sur $\mathbb{R}_+$.

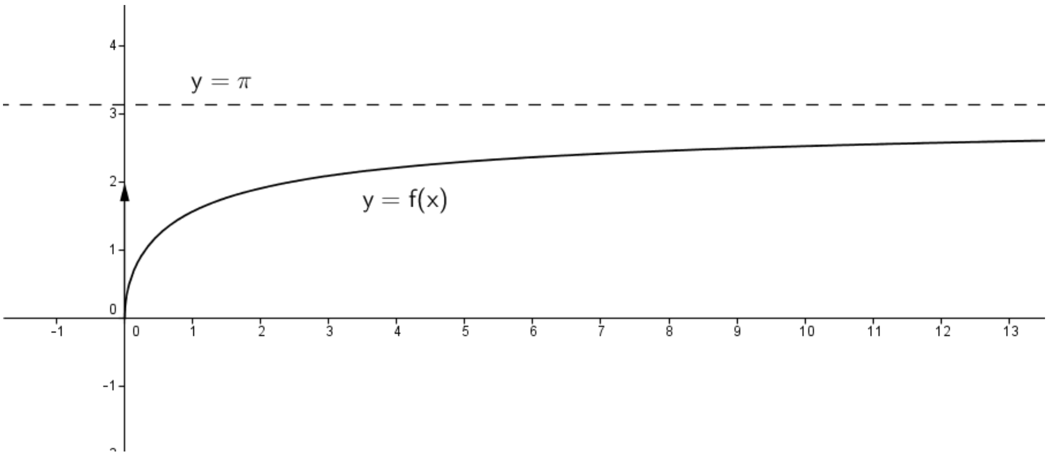
4. Nous avons $\boxed{f(0) = \arccos(1) = 0}$. Ensuite $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1-t}{1+t} = -1$ et $\arccos(-1) = \pi$ donc

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} f(t) = \pi}$$

5. La dérivée de f étant strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ nous avons le tableau de variations :

t	0		$+\infty$
$f(t)$	0	$\nearrow$	π

Et le graphe :



Partie B. Calcul d'une primitive

6. En remarquant que $\dfrac{t^2}{1+t^2} = 1 - \dfrac{1}{1+t^2}$ on obtient une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \dfrac{t^2}{1+t^2}$.

$$\boxed{t \mapsto t - \arctan(t)}$$

7. Pour $t > 0$, on considère l'expression :

$$G(t) = \int_1^t \frac{\sqrt{s}}{1+s} \mathrm{d}s$$

À l'aide du changement de variable $r = \sqrt{s}$ on obtient :

$$G(t) = \int_1^{\sqrt{t}} \frac{2r^2}{1+r^2} \mathrm{d}r = 2\left[r - \arctan(r)\right]_1^{\sqrt{t}} = 2(\sqrt{t} - \arctan(\sqrt{t})) + \frac{\pi}{2} - 2$$

8. On écrit la primitive F_1 de f qui s'annule en 1 :

$$F_1(t) = \int_1^t 2\arctan(\sqrt{s})\mathrm{d}s$$

Par intégration par parties (avec $u'(s) = 1$ et $v(s) = 2\arctan(\sqrt{s})$) :

$$F_1(t) = \left[2s\arctan(\sqrt{s})\right]_1^t - \int_1^t \frac{\sqrt{s}}{(1+s)} \mathrm{d}s$$

On a une primitive F de f sur $\mathbb{R}_+^*$ donnée par :

$$\boxed{F(t) = 2t\arctan(\sqrt{t}) - 2(\sqrt{t} - \arctan(\sqrt{t})) = 2\left(\arctan(\sqrt{t})(t+1) - \sqrt{2}\right)}$$

Partie C. Une équation différentielle

9. L'équation différentielle à résoudre est linéaire homogène du premier ordre résolue en y'. Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $t \mapsto \dfrac{1}{2t}$ est $t \mapsto \ln\sqrt{t}$.
L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation homogène est donc :
$$\{t \mapsto \lambda\sqrt{t}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

10. L'équation à résoudre est linéaire du premier ordre résolue en y'. Nous avons déjà l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.
Cherchons une solution particulière de l'équation complète de la forme $\lambda(t)\sqrt{t}$ où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Il vient :
$$\lambda'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} = f'(t)$$
Ainsi, d'après la question précédente, $t \mapsto \sqrt{t}f(t)$ est une solution particulière de l'équation. Nous avons donc l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$:
$$\boxed{\{t \mapsto (f(t)+\lambda)\sqrt{t}, \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

11. ($\star$) Étant donné une solution $y_\lambda(t) = (f(t)+\lambda)\sqrt{t}$ il s'agit d'étudier la limite $\lim\limits_{t\to+\infty} y_\lambda(t)$.
Il est clair que $\lim\limits_{t\to+\infty} \sqrt{t} = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} (f(t)+\lambda) = \pi + \lambda$. Pour avoir un produit de ces deux quantités admettant une *limite finie* il est **nécessaire** que $\lambda = -\pi$ (nous avons alors un F.I.).
Vérifions que c'est une condition **suffisante**. Si $\lambda = -\pi$ il s'agit de calculer :
$$\lim_{t\to+\infty} (2\arctan(\sqrt{t}) - \pi)\sqrt{t}$$
Rappelons que pour tout $X > 0$ nous avons $\arctan(X) + \arctan\left(\dfrac{1}{X}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ donc :
$$(2\arctan(\sqrt{t}) - \pi)\sqrt{t} = -2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\sqrt{t} = -2\frac{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{t}}}$$
Or $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x)}{x} = 1$ (taux d'accroissement) donc par composition des limites :
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{t}}} = 1$$
Il existe donc une unique solution de l'équation différentielle admettant une limite finie en $+\infty$:
$$\boxed{y(t) = (f(t)-\pi)\sqrt{t} \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} y(t) = -2}$$

12. La fonction `dsolve` de la librairie Python `sympy` permet de résoudre formellement certaines équations différentielles. Nous l'avons utilisée pour la résolution de l'équation (E_1) ; cela s'obtient avec la séquence d'instructions :
```
from sympy import *
x=symbols('x')
y=symbols('y',cls=Function)

eqd=Eq(y(x).diff(x) - y(x)/(2*x) - 1/(1+x),0)
print(eqd)
print(dsolve(eqd,y(x)))
```
Nous arrivons à en extraire la solution suivante :

y(x) == sqrt(x)(C1 -2*asin(1/sqrt(x + 1)))*

Les solutions données par Python sont-elles correctes ? Comparer-les aux solutions obtenues à l'issue de la question 10.

Nous voyons apparaître une solution particulière $g : t \mapsto \psi(t)\sqrt{t}$ avec $\psi(t) = -2\arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{t+1}}\right)$ qui diffère de la notre. On vérifie sans difficulté que ψ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\psi' = f'$. Comme les fonctions ψ et f sont égales en $t = 1$ elles conïcident sur $]0, +\infty[$. Nous obtenons bien le même ensemble de solutions.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Barème. Total /80

Présentation - Rédaction. /3

Exercice 1. /8

8 pts : forme exponentielle + dérivée et son signe + tableau + limites + graphes.

Exercice 2. /14

1. 4 pts ; 2. 4 pts ; 3. 4 pts.

Exercice 3. /15

1. (a) 3 pts, (b) 3 pts, (c) 3 pts ; 2. 6 pts.

Problème 1. /40

Partie A. 1. (a) 3 pts, (b) 2 pts, (c) 3 pts ; 2. 1 pt ; 3. (a) 2 pts, (b) 2 pts, (c) 2 pts ; 4. 2 pts ; 5. 2 pts.

Partie B. 6. 2 pts ; 7. 3 pts ; 8. 3 pts.

Partie C. 9. 2 pts ; 10. 2 pts ; 11. 4 pts ; 12. 3 pts.

Résultats

	Moyenne	**Max**	**Min**
Exercice 1	4,33	8	0
Exercice 2	7,40	14	0
Exercice 3	7,63	15	1
Problème 1	10,15	24	2
P - R	1,65	3	0
TOTAL	31,15	57	10