Devoir de Mathématiques 2

vendredi 10 octobre 2014

Durée : 3 heures

Remarques générales :

- Vérifiez que le sujet comporte 3 pages numérotées de 1 à 3.
- Vous êtes invité à apporter une attention particulière à la présentation et à la rédaction ; les copies peu lisibles ou mal présentées seront sanctionnées.
- Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et poursuivrez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

L'utilisation d'un téléphone portable, d'un ordinateur ou d'une calculatrice est interdite.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 1. Deux sommes

Calculer en fonction de $n \in \mathbb{N}$ les sommes suivantes :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{0 \leq k, \ell \leq n} 2^{k+\ell}.$$

À défaut d'un calcul de la somme B_n on pourra commencer par calculer les premières valeurs B_1, B_2 et B_3.

Exercice 2. Coefficients binomiaux

Notation. La notation $[\![a, b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers n tels que $a \leq n \leq b$.

1. **Questions de cours.**
   (a) Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$. Rappeler la définition du coefficient binomial $\binom{n}{k}$.
   (b) Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \in [\![0, n]\!]$. Démontrer les égalités :
   $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{et} \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$
   (c) Énoncer la formule du binôme de Newton. *On ne demande pas de démonstration.*
2. L'élève Blaise a réalisé un tableau des coefficients binomiaux. Il a fait les deux constats suivants :

A. « Quand je fais la somme des coefficients binomiaux d'une ligne je trouve une puissance de 2. »

B. « Quand je fais la somme des coefficients binomiaux d'une colonne je trouve le coefficient binomial de la ligne du dessous et de la colonne d'après. »

1	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	2
1	2	1	0	0	0	4
1	3	3	1	0	0	8
1	4	6	4	1	0	16
1	5	10	10	5	1	32
			20			

Il formule les deux conjectures suivantes. Les démontrer.

- **Conjecture A.** $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
- **Conjecture B.** $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in [\![0,\, n]\!], \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} \binom{\ell}{m} = \binom{n+1}{m+1}$. **Indication pour B :** récurrence sur n.

Problème 1. Études autour d'une transformation complexe

Partie I. Étude d'une quantité complexe

1. **Un exemple.** On pose $z = \dfrac{1}{1+i}\cdot$
   (a) Déterminer les parties réelle et imaginaire de z.
   (b) Déterminer le module et l'argument de z.

Dans toute la suite on considère $z_\theta = \dfrac{1}{1+e^{i\theta}}\cdot$

2. Déterminer l'ensemble D des réels θ pour lesquels z_θ est bien défini.
3. **Inégalité triangulaire.**
   (a) Énoncer *l'inégalité triangulaire* dans l'ensemble des nombres complexes.
   (b) Justifier que pour tout $\theta \in D$, $|z_\theta| \geq \dfrac{1}{2}\cdot$
4. Calculer pour $\theta \in D$ les nombres $\mathrm{Re}(z_\theta)$ et $\mathrm{Im}(z_\theta)$.

Partie II. Étude d'une fonction trigonométrique

Dans cette partie, on considère la fonction f d'une variable réelle θ définie par l'expression :

$$f(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}$$

5. Déterminer le domaine D_f de définition de f.
6. Étudier la périodicité et la parité de f. Expliquer pourquoi le domaine d'étude peut être restreint à $I = [0, \pi[$.
7. Justifier que f est dérivable et calculer sa dérivée. En déduire le tableau de variation de f sur I.
8. Calculer les deux limites ci-dessous :
   $$\lim_{\theta \to \pi^-} \frac{\sin\theta}{\theta - \pi} \quad \text{et} \quad \lim_{\theta \to \pi^-} \frac{\cos\theta + 1}{\theta - \pi}$$
   En déduire que :
   $$\lim_{\theta \to \pi^-} f(\theta) = +\infty.$$
9. Le plan est rapporté à un repère orthonormé. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe d'équation $y = f(x)$ avec $x \in D_f$.
   (a) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x = 0$.
   (b) Préciser les asymptotes à $\mathscr{C}_f$.
   (c) Tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$.
10. **Étude de la réciproque.**
    (a) Jusitifier que la fonction f induit une bijection de $]-\pi, \pi[$ vers un intervalle J à déterminer. On note g la fonction réciproque ainsi déterminée.
    (b) Étudier la dérivabilité de g sur J.

Partie III. Conclusion

On considère l'application φ définit pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ par $\varphi(z) = \dfrac{1}{1+z}\cdot$ On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

11. Montrer que φ définit une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ vers $\mathbb{C}^*$.
12. Justifier que φ induit une bijection de $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$ vers $\left\{ Z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(Z) = \dfrac{1}{2} \right\}$. Dans le plan complexe, préciser la nature géométrique de ces deux ensembles.

Problème 2. Étude d'une fonction réciproque

Soit $k \in \mathbb{R}$, l'objet de ce problème est d'exprimer certaines solutions de l'équation

$$(E_k) \quad \frac{x}{\ln x} = k, \quad \text{d'inconnue } x,$$

à l'aide d'une fonction appelée *fonction de Lambert*.
Dans la suite, on désigne par f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ et par g la fonction définie par $g(x) = x\exp(x)$.

Partie I. Étude de f

1. Donner le domaine de définition D_f de f.
2. Justifier que f est dérivable sur D_f puis calculer f'.
3. Déterminer les limites aux bornes de D_f.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Justifier que f réalise une bijection de $]1, e]$ vers $[e, +\infty[$

Dans la suite, on note $f^{-1} : [e, +\infty[\to]1, e]$ la réciproque de f.

6. Discuter en fonction de k du nombre de solutions de l'équation (E_k).

Partie II. Fonction W de Lambert

On a réalisé l'étude de la fonction g. C'est une fonction définie et dérivable sur $D_g = \mathbb{R}$ dont le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

7. Montrer l'existence d'une fonction $W : [-e^{-1}, +\infty[\to [-1, +\infty[$ telle que pour tout $y \geq -e^{-1}$:

$$W(y)\, e^{W(y)} = y$$

8. Justifier que W est continue sur $[-e^{-1}, +\infty[$ puis étudier les variations de W.
9. Déterminer $W(-e^{-1})$, $W(0)$, $W(e)$ et $\lim\limits_{y \to +\infty} W(y)$.

Note. *La fonction W étudiée ici est appelée la fonction W de Lambert (il s'agit plus précisement d'une de ses déterminations). La fonction de Lambert est une fonction usuelle qui apparaît dans des contextes variés, notamment en mécanique quantique.*

10. Montrer que W est dérivable sur $]-e^{-1}, +\infty[$ puis que pour tout $y > -e^{-1}$, et $y \neq 0$

$$W'(y) = \frac{W(y)}{y(1 + W(y))}$$

Partie III. Expression des solutions (E_k) à l'aide de W

Soit $k \geq e$. L'objectif de cette dernière partie est d'exprimer une solution de (E_k) à l'aide de la fonction W.

11. Soit $x > 0$ un réel. Justifier l'existence d'un unique réel $z \in \mathbb{R}$ tel que $x = e^{-z}$.
    Établir que $\dfrac{x}{\ln x} = k$ équivaut à $z\, e^z = -\dfrac{1}{k}$.
12. En déduire une expression de $f^{-1}(k)$ à l'aide de W pour tout $k \geq e$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Fin de l'énoncé