Devoir de Mathématiques 2 : corrigé

Exercice 1. Deux sommes

La somme A_n est la somme des termes d'une suite géométrique de raison 2. Avec le cours nous obtenons :

$$\boxed{A_n = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1}-1}$$

Calculons la somme double.

$$\begin{aligned}
B_n &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n} 2^{k+\ell} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^{k}2^{\ell} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(2^k\left(\sum_{\ell=0}^{n} 2^{\ell}\right)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(2^k\left(2^{n+1}-1\right)\right) \\
&= \left(2^{n+1}-1\right)\sum_{k=0}^{n} 2^k
\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{B_n = \left(2^{n+1}-1\right)^2}$$

Exercice 2. Coefficients binomiaux

Notation. La notation $[\![a,b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers n tels que $a \leq n \leq b$.

1. **Questions de cours.** Vues en cours.
2. L'élève Blaise a réalisé un tableau des coefficients binomiaux. Il a fait les deux constats suivants :

A. « Quand je fais la somme des coefficients binomiaux d'une ligne je trouve une puissance de 2. »

B. « Quand je fais la somme des coefficients binomiaux d'une colonne je trouve le coefficient binomial de la ligne du dessous et de la colonne d'après. »

1	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	2
1	2	1	0	0	0	4
1	3	3	1	0	0	8
1	4	6	4	1	0	16
1	5	10	10	5	1	32
			20			

Il formule les deux conjectures suivantes. Démontrons-les.

- **Conjecture A.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec la formule du binôme de Newton on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k} = 2^n}$$

- **Conjecture B.** On procède par récurrence sur n. Posons l'hypothèse :

$$\mathcal{H}_n : \forall m \in [\![0,n]\!],\ \sum_{\ell=0}^{n}\binom{\ell}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

- **Initialisation.** Pour $n = 0$. Soit $m = 0$. Nous avons :
$$\sum_{\ell=0}^{0} \binom{\ell}{0} = \binom{0}{0} = 1 = \binom{0+1}{0+1}.$$
- **Hérédité.** Supposons que $\mathcal{H}_n$ est vraie. Soit $m \in [\![0, n+1]\!]$.
  - Si $m = n+1$ alors
$$\sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{\ell}{n+1} = 0 + \cdots + 0 + \binom{n+1}{n+1} = 1 = \binom{n+2}{m+1} \text{ car } m+1 = n+2$$
  - Si $m \in [\![0, n]\!]$ alors
$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{\ell}{m} &= \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n} \binom{\ell}{m}} + \binom{n+1}{m} \\ &= \binom{n+1}{m+1} + \binom{n+1}{m} \\ &= \binom{n+2}{m+1} \end{aligned}$$

  Dans tous les cas : $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'assertion $\mathcal{H}_n$ est vraie.

Problème 1. Études autour d'une transformation complexe

Partie I. Étude d'une quantité complexe

1. **Un exemple.** On pose $z = \dfrac{1}{1+i}$.
   (a) $z = \dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1-i}{2}$. Nous avons donc :
$$\boxed{\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathrm{Im}(z) = \frac{-1}{2}}$$
   (b) $1 + i = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} i\right) = \sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}}$. Cela donne donc pour l'inverse z :
$$\boxed{|z| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \arg(z) = -\frac{\pi}{4} \ [2\pi]}$$

Dans toute la suite on considère $z_\theta = \dfrac{1}{1+e^{i\theta}}$.

2. Le complexe z_θ n'est pas défini si et seulement si $e^{i\theta} = -1$ ou encore $\theta = \pi \ [2\pi]$. Nous avons donc :
$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}}$$
3. **Inégalité triangulaire.**
   (a) Cf cours.
   (b) Nous avons par l'inégalité triangulaire $|1 + e^{i\theta}| \leq |1| + |e^{i\theta}| = 2$. En passant à l'inverse on obtient :
$$|z_\theta| = \frac{1}{|1+e^{i\theta}|} \geq \frac{1}{2}.$$

4. En multipliant par le conjugué $1 + +e^{-i\theta}$ du dénominateur on obtient :

$$z_\theta = \frac{1}{1+e^{i\theta}} = \frac{1+e^{-i\theta}}{2+2\cos(\theta)} = \frac{1+\cos(\theta)}{2+2\cos(\theta)} - i\frac{\sin(\theta)}{2+2\cos(\theta)}$$

On trouve donc :

$$\mathrm{Re}(z_\theta) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z_\theta) = -\frac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}$$

Partie II. Étude d'une fonction trigonométrique

Dans cette partie, on considère la fonction f d'une variable réelle θ définie par l'expression :

$$f(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}$$

5. $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}}$
6. On vérifie sans difficulté que f est 2π-périodique et impaire. Le domaine d'étude peut être restreint à $I = [0, \pi[$: l' imparité permet alors de compléter l'étude de f à $]-\pi, \pi[$ ce qui est suffisant par 2π-périodicité.
7. La fonction f est dérivable sur D_f comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et :

$$\forall \theta \in D_f, f'(\theta) = \frac{1}{1+\cos(\theta)}$$

On obtien le tableau de variation de f sur I.

θ	0		π
$f(\theta)$	0	$\nearrow$	FI

8. Les deux limites se calculent en faisant intervenir des taux d'accroissement :

$$\lim_{\theta \to \pi^-} \frac{\sin\theta}{\theta - \pi} = \lim_{\theta \to \pi^-} \frac{\sin\theta - \sin\pi}{\theta - \pi} = \sin'(\pi) = -1$$

$$\lim_{\theta \to \pi^-} \frac{\cos\theta + 1}{\theta - \pi} = \lim_{\theta \to \pi^-} \frac{\cos\theta - \cos\pi}{\theta - \pi} = \cos'(\pi) = 0^-$$

En multipliant la première par l'inverse de la seconde on obtient :

$$\boxed{\lim_{\theta \to \pi^-} f(\theta) = +\infty}$$

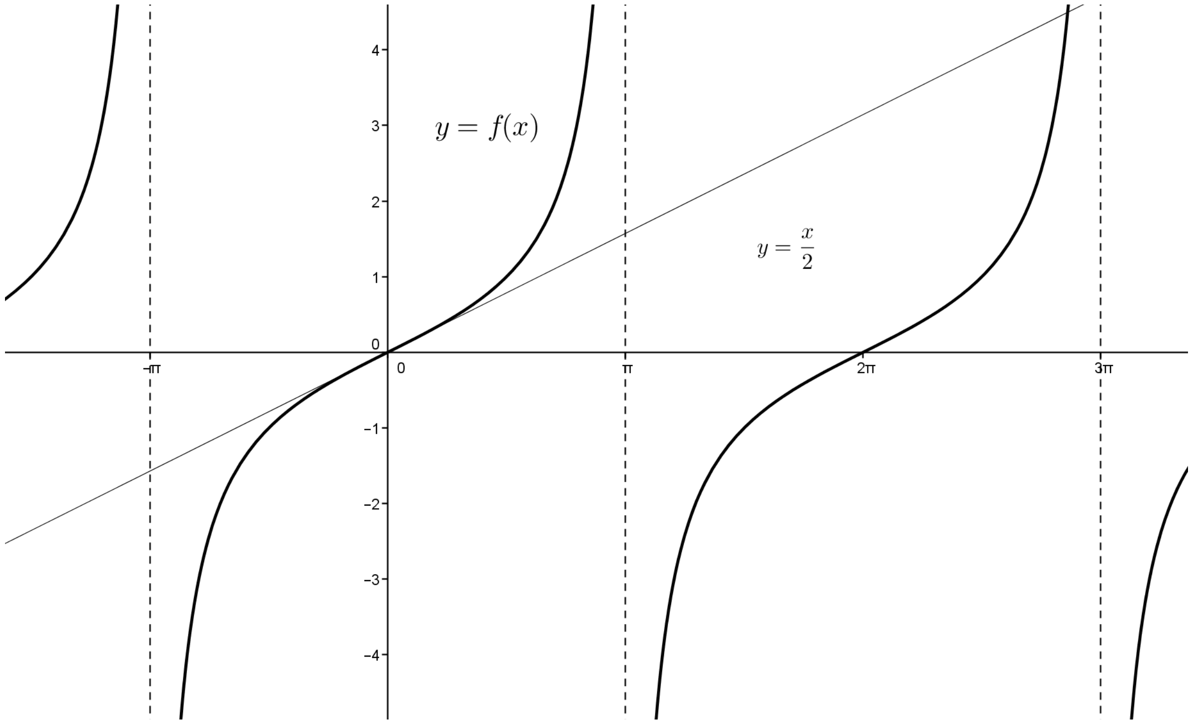
9. Le plan est rapporté à un repère orthonormé. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe d'équation $y = f(x)$ avec $x \in D_f$.
   (a) L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x = 0$ est :

$$\boxed{y = f'(0)(x-0) + f(0) \iff y = \frac{x}{2}}$$

   (b) Les asymptotes à $\mathscr{C}_f$ sont les droites d'équation :

$$\boxed{x = k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$$

(c) Allure de $\mathscr{C}_f$.



10. **Étude de la réciproque.**

    (a) La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\pi,\pi[$. Nous avons $\lim_{\theta\to\pi^-} f(\theta) = +\infty$ et $\lim_{\theta\to-\pi^+} f(\theta) = -\infty$. Donc d'après le théorème de la bijection f induit une bijection de $]-\pi,\pi[$ vers l'intervalle $J = \mathbb{R}$ à déterminer. On note g la fonction réciproque ainsi déterminée.

    (b) La fonction f est dérivable sur J et pour tout $\theta \in I$, $f'(\theta) \neq 0$. Donc, d'après un théorème de cours, la fonction g est dérivable sur J.

Partie III. Conclusion

On considère l'application φ définit pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ par $\varphi(z) = \dfrac{1}{1+z}\cdot$ On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

11. Soit $w \in \mathbb{C}^*$.

$$\begin{aligned} w = \varphi(z) &\iff w = \tfrac{1}{1+z} \\ &\iff (1+z)w = 1 \\ &\iff z = \frac{1-w}{w} \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $w \in \mathbb{C}^*$ il existe un unique $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ tel que $w = \varphi(z)$: cela se traduit en disant que φ est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ vers $\mathbb{C}^*$.

12. Notons $\mathscr{D} = \left\{ Z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(Z) = \dfrac{1}{2} \right\}$. Soit $w \in \mathscr{D}$. Il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ tel que $w = \dfrac{1}{2} + iy$.

Or d'après le résultat de la question 10 (a) il existe un unique $\theta \in]-\pi,\pi[$ tel que $-2y = f(\theta)$ ou encore avec la question 4 :

$$w = \frac{1}{2} + iy = w = \frac{1}{2} - i\frac{\sin(\theta)}{2+2\cos(\theta)} = \frac{1}{1+e^{i\theta}}$$

Il existe donc un unique $z = e^{i\theta} \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$ tel que $w = \varphi(z)$. Cela siginifie que φ induit une bijection de $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$ vers $\mathscr{D}$.

Dans le plan complexe :

- $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$ s'identifie au cercle de centre O et de rayon 1 privé du point $(-1,0)$;
- $\mathscr{D}$ s'identifie à la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}\cdot$

Problème 2. Étude d'une fonction réciproque

Soit $k \in \mathbb{R}$, l'objet de ce problème est d'exprimer certaines solutions de l'équation

$$(E_k) \quad \frac{x}{\ln x} = k, \quad \text{d'inconnue } x,$$

à l'aide d'une fonction appelée *fonction de Lambert*.

Dans la suite, on désigne par f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ et par g la fonction définie par $g(x) = x\,\exp(x)$.

Partie I. Étude de f.

1. f est définie en x si et seulement si $x > 0$ et $\ln x \neq 0$ D'où $D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$.
   si et seulement si $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$.
2. les fonctions $f_1 \ : \ x \mapsto x$ et $f_2 \ : \ x \mapsto \ln x$ sont dérivables sur D_f. Puisque f_2 ne s'annule pas sur D_f, la fonction f est dérivable sur D_f comme quotient de fonctions dérivables.
   Pour tout $x \in D_f$, on a :
   $$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}.$$
3. • **En 0^+ :** avec les notations ci-dessus, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f_2(x) = -\infty$. D'où :
   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0.$$
   • **En 1^- :** on a $\lim\limits_{x\to 1^-} f_1(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f_2(x) = 0^-$. D'où :
   $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty.$$
   • **En 1^+ :** on a $\lim\limits_{x\to 1^+} f_1(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f_2(x) = 0^+$. D'où :
   $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty.$$
   • **En $+\infty$:** par croissance comparée, on a
   $$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$
4. Pour $x \in D_f$, le signe de $f'(x)$ est donné par celui de $\ln x - 1$. On en déduit immédiatement le signe de f' et le tableau de variations de f :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ 0	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

5. f est strictement décroissante et continue sur $]1,e]$. D'après le théorème de la bijection continue, f réalise alors une bijection de $]1,e]$ vers $f(]1,e]) = [e,+\infty[$.

Dans la suite, on note $f^{-1} \ : \ [e,+\infty[\to]1,e]$ la réciproque de f.

6. D'après le tableau de variations de f, on a :
   • si $k < 0$, l'équation (E_k) admet une unique solution ;
   • si $0 \leq k < e$, l'équation (E_k) n'a pas de solution ;
   • si $k = e$, l'équation (E_k) admet une unique solution ;
   • si $k > e$, l'équation (E_k) admet deux solutions.

Partie II. Fonction W de Lambert

On a réalisé l'étude de la fonction g. C'est une fonction définie et dérivable sur $D_g = \mathbb{R}$ dont le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

7. D'après le tableau de variations de g, la fonction g est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$. De plus, g est dérivable sur $[-1, +\infty[$ donc g est continue sur $[-1, +\infty[$. D'après le théorème de la bijection continue, g réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ vers $g([-1, +\infty[) = [-e^{-1}, +\infty[$.
   Posons $W \; : \; [-e^{-1}, +\infty[\to [-1, +\infty($ la réciproque de $g_{|[-1,+\infty[}$. On a donc pour tout $y \in [-e^{-1}, +\infty[$
   $$g(W(y)) = y \text{ c'est-à-dire } W(y)e^{W(y)} = y.$$
8. Le théorème de la bijection continue assure que W est continue sur $[-e^{-1}, +\infty[$. De plus W a le même sens de variations que g sur $[-1, +\infty[$. Ainsi W est strictement croissante sur $[-e^{-1}, +\infty[$.
9. D'après le tableau de variations de g, on a immédiatement :
   $$W(-e^{-1}) = -1 \text{ et } \lim_{y\to+\infty} W(y) = +\infty.$$
   On remarque également que $g(0) = 0$ d'où $W(0) = 0$
   que $g(1) = e$ d'où $W(e) = 1$.

Note. *La fonction W étudiée ici est appelée la fonction W de Lambert (il s'agit plus précisement d'une de ses déterminations). La fonction de Lambert est une fonction usuelle qui apparaît dans des contextes variés, notamment en mécanique quantique.*

10. La fonction W est la réciproque d'une **fonction dérivable** et dont **la dérivée ne s'annule pas** sur le domaine $]-1, +\infty[$. D'après le **théorème de dérivabilité d'une fonction réciproque** : la fonction W est dérivable sur le domaine image $g(]-1, +\infty[) =]-e^{-1}, +\infty[$.
    De la dérivabilité de W, on en déduit que la fonction composée $y \mapsto g(W(y))$ est dérivable sur $]-e^{-1}, +\infty[$ et pour tout $y > -e^{-1}$:
    $$(g \circ W)'(y) = g'(W(y))\, W'(y) = (1 + W(y))\, e^{W(y)}\, W'(y).$$
    Par ailleurs, on sait que $(g \circ W)(y) = y$ pour tout $y > -e^{-1}$. Il en découle dans le même temps que $(g \circ W)'(y) = 1$ pour tout $y > -e^{-1}$. D'où :
    $$\forall y > -e^{-1},\ (1 + W(y))\, e^{W(y)}\, W'(y) = 1.$$
    Puisque $y > -e^{-1}$, on a $1 + W(y) \neq 0$ et donc :
    $$\forall y > -e^{-1}, W'(y) = \frac{1}{1 + W(y)} e^{-W(y)}.$$
    Or la relation $W(y)\, e^{W(y)} = y$ permet d'écrire $e^{-W(y)} = \frac{W(y)}{y}$ à condition que $y \neq 0$. On peut donc écrire sous cette condition supplémentaire :
    $$W'(y) = \frac{W(y)}{y\,(1 + W(y))}.$$

Partie III. Expression des solutions (E_k) à l'aide de W

Soit $k \geq e$. L'objectif de cette dernière partie est d'exprimer une solution de (E_k) à l'aide de la fonction W.

11. La fonction $z \mapsto e^{-z}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0, +\infty[$. Par conséquent $x > 0$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = e^{-z}$ avec $z \in \mathbb{R}$.
    Soit $x > 0$ donné. On a alors :
    $$\begin{aligned} x \text{ est solution de } (E_k) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{e^{-z}}{-z} = k \text{ où } z \text{ est défini par } x = e^{-z} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{z}{e^{-z}} = -\frac{1}{k} \\ &\Leftrightarrow \quad z\, e^{z} = -\frac{1}{k}. \end{aligned}$$

12. On cherche d'abord une solution s'exprimant à l'aide de la fonction W.
Si $k \geq e$, on a alors
$$-\frac{1}{e} \leq -\frac{1}{k} < 0.$$
Par conséquent W est définie en $-\frac{1}{k}$.
Posons $z = W(-\frac{1}{k})$. On a alors : $z\, e^z = -\dfrac{1}{k}$. Compte-tenu de la stricte croissance de W, on a de plus :
$$W(-\frac{1}{e}) = -1 \leq z < 0 = W(0).$$
La question précédente montre que $x = e^{-z}$ est solution de l'équation (E_k). L'encadrement précédent de z conduit à l'encadrement suivant de x :
$$1 < x \leq e^{-1}.$$
Il en résulte que $x = f^{-1}(k)$ puisque $f^{-1}(k)$ est l'unique antécédent de k dans l'intervalle $]1, e]$.
Mais alors, on a pour tout $k \geq e$:
$$\boxed{f^{-1}(k) = e^{-W(-\frac{1}{k})} = -kW(-\frac{1}{k}).}$$

Barème. Total /90

Présentation - Rédaction. /3

Exercice 1. /6

2 pts et 4 pts.

Exercice 2. /14

1. (a) 2 pts, (b) 4 pts, (c) 2 pts ; 2. 2 pts et 4 pts.

Problème 1. /24

Partie I. 1. (a) 2 pts, (b) 2 pts ; 2. 2 pts ; 3. (a) 1 pt, (b) 2 pts ; 4. 3 pts.

Partie II. 5. 1 pt ; 6. 3 pts ; 7. 4 pts ; 8. 3 pt ; 9. (a) 1 pt ; (b) 1 pt ; (c) 2 pt ; 10. (a) 3 pts, (b) 2 pts.

Partie III. 11. 2 pts ; 12. 3 pts.

Problème 2. /48

Partie I. 1. 2 pts ; 2. 2 pts ; 3. 4 pts ; 4. 2 pts ; 5. 2 pts ; 6. 2 pts.

Partie II. 7. 3 pts ; 8. 2 pts ; 9. 4 pts ; 10. 3 pts ; 11. 2 pts ; 12. 2 pts.

Résultats

	Moyenne	**Max**	**Min**
Exercice 1	3.05	6	0
Exercice 2	4.6	14	0
Problème 1	16.73	24.5	8.5
Problème 2	8.03	16.5	2
P - R	1.83	3	0.5
TOTAL	34.23	51	11.5