Devoir de Mathématiques 1

vendredi 12 septembre 2014

Durée : 2 heures 30

Remarques générales :

- Vérifiez que le sujet comporte 2 pages numérotées de 1 à 2.
- Vous êtes invité à apporter une attention particulière à la présentation et à la rédaction ; les copies peu lisibles ou mal présentées seront sanctionnées.
- Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et poursuivrez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

L'utilisation d'un téléphone portable, d'un ordinateur ou d'une calculatrice est interdite.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 1. Une inégalité

1. Démontrer que pour tout couple (a, b) de *nombres réels positifs* nous avons les inégalités :

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}.$$

2. Étudier le cas d'égalité dans chaque inégalité.
3. Que peut-on dire de l'ensemble $\mathscr{M} = \left\{ \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} \mid (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \right\}$?

Exercice 2. Inéquations

Déterminer l'ensemble des solutions réelles des *inéquations* suivantes. L'ensemble des solutions sera exprimé sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles. Les solutions doivent êtres justifiées.

$$(a) \quad \frac{x^2}{1+x^2} \geq \frac{1}{3} \quad ; \quad (b) \quad \frac{2x^2+1}{x+1} \leq 2 \quad ;$$

$$(c) \quad x + 3\sqrt{1-x} \leq 3 \quad ; \quad (d) \quad x + 2|1-x| \geq 2.$$

Exercice 3. Trigonométrie

Nota Bene : les trois questions qui suivent sont indépendantes.

1. En utilisant les identités du formulaire de trigonométrie démontrer que :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\beta).$$

Identifier clairement sur votre copie les formules utilisées.

2. Déterminer l'ensemble des solutions des équations trigonométriques ci-dessous :

$$(a) \quad \sin(2\theta) = \frac{1}{2} \quad ; \quad (b) \quad \cos(\theta) - \sin(\theta) = 0 \quad ; \quad (c) \quad \cos(\theta) - \sin(\theta) = 1.$$

3. Donner dans $[0, 2\pi]$ l'ensemble des solutions de l'inéquation : $\cos(\theta) \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 4. Étude d'un ensemble

On considère le sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ suivant :

$$A = \left\{\cos(\theta + \varphi) + \sin(\theta) - \sin(\varphi) \mid (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

1. Justifier que l'ensemble A est majoré par 3 et minorée par -3.
2. Déterminer l'ensemble des couples $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\cos(\theta + \varphi) + \sin(\theta) - \sin(\varphi) = 3$. À défaut donner au moins un tel couple.

Problème. Aire maximale d'un triangle à périmètre prescrit

« Parmi tous les triangles ayant un périmètre donné, quels sont ceux ayant l'aire la plus grande ? »

Partie 1. L'inégalité de la moyenne

On se propose d'établir dans les questions 1 et 2 la propriété $(\star)$ suivante :

$$(\star) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3,\ x + y + z = 1 \Rightarrow x\,y\,z \leq \frac{1}{27}$$

1. Démontrer à l'aide d'une étude de fonction que :
$$\forall y \in [0, 1],\ y(1 - y)^2 \leq \frac{4}{27}.$$
Étudier le cas d'égalité.
2. Soit $y \in [0, 1]$ **fixé**. On pose $f_y(x) = -y\,x^2 + y(1 - y)\,x$.
   (a) Déterminer le maximum de f_y sur $[0, 1 - y]$.
   (b) En déduire la propriété $(\star)$.
   (c) Vérifier que le cas d'égalité se produit si et seulement si $x = y = z = \frac{1}{3}$.
3. En utilisant la propriété $(\star)$ démontrer que :
$$\forall (u, v, w) \in \mathbb{R}_+^3,\ u\,v\,w \leq \left(\frac{u + v + w}{3}\right)^3.$$
4. Soit $(u, v, w) \in \mathbb{R}_+^3$. Montrer que $u\,v\,w = \left(\frac{u + v + w}{3}\right)^3$ si et seulement si $u = v = w$.

Partie 2. Recherche du triangle d'aire maximale

Soit $p > 0$ un réel. L'objectif est de déterminer à quelle condition l'aire d'un triangle de côtés a, b et c vérifiant $a + b + c = 2p$ est maximale.

Pour cela, on admettra que l'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle de côtés a, b et c et de demi-périmètre $p = \frac{a + b + c}{2}$ est donnée par la *formule de Héron*[1] :

$$\mathcal{A} = \sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}.$$

On pose $u = p - a$; $v = p - b$ et $w = p - c$.

5. Justifier à l'aide d'un argument géométrique que u, v et w sont positifs.
6. En appliquant l'inégalité obtenue à la question 3 déterminer la valeur maximale de $\mathcal{A}$.
7. À l'aide de la question 4 préciser pour quelles valeurs de a, b et c cette aire maximale est atteinte. Que peut-on alors dire du triangle ?

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

1. Héron d'Alexandrie est un ingénieur, un mécanicien et un mathématicien grec du Ier siècle après J.-C.