Devoir de Mathématiques 1 : corrigé

Exercice 1. Une inégalité

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$. Démontrons les deux inégalités demandées. La stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$ justifie l'équivalence dans la mise au carré des inégalités.

$$\begin{aligned} & \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b} \\ \iff & a+b \leq a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b \\ \iff & 0 \leq 2\sqrt{ab} \end{aligned}$$

Cette dernière assertion est vraie donc par équivalences successives la première l'est aussi.

$$\begin{aligned} & \sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)} \\ \iff & a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b \leq 2(a+b) \\ \iff & 0 \leq a-2\sqrt{ab}+b \\ \iff & 0 \leq (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \end{aligned}$$

Cette dernière assertion est vraie donc par équivalences successives la première l'est aussi.

2. Nous obtenons par un même calcul les cas d'égalité :

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a}+\sqrt{b} \iff 0 = 2\sqrt{ab} \iff \boxed{a=0 \text{ ou } b=0}$$

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{2(a+b)} \iff (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = 0 \iff \boxed{a=b}$$

3. Pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ les inégalités de la question 1 nous donnent :

$$1 \leq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} \leq \sqrt{2}$$

Donc l'ensemble $\mathscr{M}$ est minoré par 1 et majoré par $\sqrt{2}$: c'est un **ensemble borné.**

Exercice 2. Inéquations

(a) Comme $1+x^2>0$, nous avons

$$\frac{x^2}{1+x^2} \geq \frac{1}{3} \iff x^2 \geq \frac{x^2+1}{3} \iff \frac{2x^2}{3} \geq \frac{1}{3} \iff x^2 \geq \frac{1}{2}.$$

Nous avons l'ensemble $\mathscr{S}_a$ des solutions :

$$\boxed{\mathscr{S}_a =]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup[\frac{1}{2}, +\infty[}$$

(b)

$$\frac{2x^2+1}{x+1} \leq 2 \iff \frac{2x^2+1}{x+1} - 2 \leq 0 \iff \underbrace{\frac{2x^2-2x-1}{x+1}}_{P(x)} \leq 0$$

Factorisons le numérateur. Il s'agit d'un trinôme du second degré de discriminant :

$$\Delta = 4-4(-2)(-1) = 12.$$

Les racines complexes sont $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Nous avons donc le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		x_1		x_2		$+\infty$
$2x^2-2x-1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Nous avons l'ensemble $\mathscr{S}_b$ des solutions :

$$\boxed{\mathscr{S}_b =]-\infty,-1[\cup[\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2}]}$$

(c) Nécessairement $1 \geq x$. Nous avons donc aussi $3-x \leq 0$.

$$\begin{array}{ll} & 3\sqrt{1-x} \leq 3-x \\ \iff & 9(1-x) \leq (3-x)^2 \quad \text{par croissance stricte de la fonction carrée} \\ \iff & 9-9x \leq 9-6x+x^2 \\ \iff & 0 \leq x(3+x) \end{array}$$

Nous avons l'ensemble $\mathscr{S}_c$ des solutions :

$$\boxed{\mathscr{S}_c =]-\infty,-3]\cup[0,1]}$$

(d) Par disjonction de cas.

- Si $x \leq 1$ alors $|1-x| = 1-x$ et

$$x+2(1-x) \geq 2 \iff x \leq 0.$$

- Si $x > 1$ alors $|1-x| = x-1$ et

$$x+2(x-1) \geq 2 \iff x \geq \frac{4}{3}.$$

Nous avons l'ensemble $\mathscr{S}_d$ des solutions :

$$\boxed{\mathscr{S}_d =]-\infty,0]\cup[\frac{4}{3},+\infty[}$$

Exercice 3. Trigonométrie

Nota Bene : les trois questions qui suivent sont indépendantes.

1. Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, **les formules d'addition** pour le cosinus donnent :

$$\begin{array}{rcl} \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) & = & (\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta))\,(\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)) \\ & = & \cos^2(\alpha)\cos^2(\beta)-\sin^2(\alpha)\sin^2(\beta) \\ & = & \cos^2(\alpha)(1-\sin^2(\beta))-\sin^2(\alpha)(1-\cos^2(\beta)) \\ & = & \cos^2(\alpha)-\sin^2(\beta) \end{array}$$

En utilisant les identités du formulaire de trigonométrie démontrer que :

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\quad \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2(\alpha)-\sin^2(\beta).$$

2. (a)

$$\sin(2\theta) = \frac{1}{2} \iff \sin(2\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \iff \left\{\begin{array}{ll} & 2\theta = \frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou} & 2\theta = \frac{5\pi}{6}+2k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Nous avons les solutions :

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{12}+k\pi \text{ ou } \theta = \frac{5\pi}{12}+k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}}$$

(b)

$$\cos(\theta) - \sin(\theta) = 0 \Longleftrightarrow \cos(\theta) = \sin(\theta)$$

Nous avons les solutions :

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$$

(c) Avec une formule d'addition il vient :

$$\cos(\theta) - \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\begin{array}{ll} & \cos(\theta) - \sin(\theta) = 1 \\ \Longleftrightarrow & \sqrt{2}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \Longleftrightarrow & \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} & \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} & \theta + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \end{array}$$

Nous avons les solutions :

$$\boxed{\theta = 2k\pi \text{ ou } \theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$$

3. $\cos(\theta) \leq \frac{1}{2} \iff \cos(\theta) \leq \cos(\frac{\pi}{3})$· Par lecture du cercle trigonométrique on vérifie que l'ensemble des solutions dans $[0, 2\pi]$ de l'inéquation est :

$$\boxed{[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]}$$

Exercice 4. Étude d'un ensemble

On considère le sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ suivant :

$$A = \left\{\cos(\theta + \varphi) + \sin(\theta) - \sin(\varphi) \mid (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

1. Pour tout $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ nous avons par inégalité triangulaire :

$$|\cos(\theta + \varphi) + \sin(\theta) - \sin(\varphi)| \leq |\cos(\theta + \varphi)| + |\sin(\theta)| + |\sin(\varphi)| \leq 1 + 1 + 1 = 3$$

Donc pour tout $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$:

$$\boxed{-3 \leq \cos(\theta + \varphi) + \sin(\theta) - \sin(\varphi) \leq 3}$$

Donc l'ensemble A est majoré par 3 et minorée par -3.

2. Partant du constat que $3 = 1 + 1 + 1$ nous pouvons écrire :

$$\cos(\theta + \varphi) + \sin(\theta) - \sin(\varphi) = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = \underbrace{(1 - \cos(\theta + \varphi))}_{\geq 0} + \underbrace{(1 - \sin(\theta))}_{\geq 0} + \underbrace{(1 + \sin(\varphi))}_{\geq 0}$$

Or une somme de positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls. Ainsi :

$$\cos(\theta + \varphi) + \sin(\theta) - \sin(\varphi) = 3 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta + \varphi) = 1 \\ \sin(\theta) = 1 \\ \sin(\varphi) = -1 \end{array} \right.$$

Sans difficulté on trouve donc :

$$\boxed{\cos(\theta + \varphi) + \sin(\theta) - \sin(\varphi) = 3 \Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ et } \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k'\pi \text{ avec } (k, k') \in \mathbb{Z}^2}$$

Problème. Aire maximale d'un triangle à périmètre prescrit

« Parmi tous les triangles ayant un périmètre donné, quels sont ceux ayant l'aire la plus grande ? »

Partie 1. L'inégalité de la moyenne

On se propose d'établir dans les questions 1 et 2 la propriété $(\star)$ suivante :

$$(\star)\quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}_+^3,\ x+y+z=1 \Rightarrow x\,y\,z\le \frac{1}{27}$$

1. On étudie la fonction h définie pour $y\in[0,1]$ par $h(y)=y(1-y)^2$. La fonction est polynomiale donc dérivable et pour tout $y\in[0,1]$,

$$h'(y)=(1-y)^2-2y(1-y)=(1-y)(1-3y)$$

Nous obtenons donc le tableau des variations :

y	0		$\frac{1}{3}$		1
$h'(y)$		$+$	0	$-$	0
$h(y)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0

Par lecture du tableau de variations on vérifie donc que :

$$\boxed{\forall y\in[0,1],\ y(1-y)^2\le\frac{4}{27}}$$

Le cas d'égalité est obtenu si et seulement si $y=\dfrac{1}{3}$.

2. Soit $y\in[0,1]$ **fixé**. On pose $f_y(x)=-y\,x^2+y(1-y)\,x$.

   (a) Le cas $y=0$ ne pose pas de difficulté ; on l'exclut de la discussion à suivre. La quantité $f_y(x)=x(-yx+y(1-y))$ est un trinôme du second degré qui atteint son maximum au milieu des racines 0 et $(1-y)$. En conclusion la fonction f_y atteint son maximum sur $[0,1-y]$ au point d'abscisse $\boxed{\dfrac{1-y}{2}}$.
   Nous avons alors la valeur maximale :

$$f_y\left(\frac{1-y}{2}\right)=\frac{y(1-y)^2}{4}$$

   (b) Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}_+^3$ tel que $x+y+z=1$. Nous avons :

$$xyz=xy(1-x-y)=f_y(x)\le f_y\left(\frac{1-y}{2}\right)=\frac{y(1-y)^2}{4}\underbrace{\le}_{\text{d'après 1}}\frac{1}{27}$$

   D'où la propriété $(\star)$.

   (c)
   - Si $x=y=z=\dfrac{1}{3}$ alors $xyz=\dfrac{1}{27}$.
   - Réciproquement, soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}_+^3$ tel que $x+y+z=1$. On suppose aussi que $xyz=\dfrac{1}{27}$. Toutes les inégalités dans la ligne ci-dessus deviennent des égalités. Nous avons alors
     - d'une part : $\dfrac{y(1-y)^2}{4}=\dfrac{1}{27}$; donc d'après la question 1 $y=\dfrac{1}{3}$;
     - d'autre part : $f_y(x)=f_y\left(\dfrac{1-y}{2}\right)$; donc d'après la question 2, $x=\dfrac{1-y}{2}=\dfrac{1}{3}$;

  - enfin $z = 1 - x - y = \dfrac{1}{3}$.

  C'est le cas d'égalité attendu.

3. Soit $(u, v, w) \in \mathbb{R}_+^3$. Supposons qu'ils ne sont pas tous nuls (auquel cas l'inégalité est bien vérifiée). Posons

$$u + v + w = M \text{ et puisque } M \neq 0, x = \frac{u}{M}\ ,\ y = \frac{v}{M} \text{ puis } z = \frac{w}{M}$$

de sorte que $x + y + z = 1$. La propriété $(\star)$ nous montre que :

$$xyz = \frac{uvw}{M^3} \leq \frac{1}{3^3}.$$

En multipliant par M^3 on obtient finalement l'inégalité attendue.

4. Le cas d'égalité résulte sans difficulté du cas d'égalité de la proposition $(\star)$ vu dans la question 2 (c).

Partie 2. Recherche du triangle d'aire maximale

Soit $p > 0$ un réel. L'objectif est de déterminer à quelle condition l'aire d'un triangle de côtés a, b et c vérifiant $a + b + c = 2p$ est maximale.

Pour cela, on admettra que l'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle de côtés a, b et c et de demi-périmètre $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ est donnée par la *formule de Héron*[1] :

$$\mathcal{A} = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}.$$

On pose $u = p - a$; $v = p - b$ et $w = p - c$.

5. Puisque a, b, c sont les longueurs des côtés d'un triangle ils sont soumis à l'**inégalité triangulaire** à savoir :

$$a \leq b + c \quad ; \quad b \leq a + c \quad ; \quad c \leq a + b$$

On vérifie alors par un simple calcul que u, v et w sont positifs.

6. En appliquant l'inégalité obtenue à la question 3 à $u = p - a$, $v = p - b$ et $w = p - c$ nous avons donc

$$(p-a)\,(p-b)\,(p-c) \leq \left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3 = \frac{p^3}{27}.$$

$$\mathcal{A} = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)} \leq \sqrt{p}\sqrt{\frac{p^3}{27}} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$$

7. À l'aide de la question 4 on vérifie que l'aire maximale est atteinte si et seulement si $p - a = p - b = p - c$ ou encore $a = b = c$; c'est le cas du triangle **équilatéral**.

1. Héron d'Alexandrie est un ingénieur, un mécanicien et un mathématicien grec du Ier siècle après J.-C.

Barème. Total /60

Présentation - Rédaction. /2

Exercice 1. /8

1. 4 pts ; 2. 2 pts ; 3. 2 pts.

Exercice 2. /12

Toutes les inégalités à 3 pts.

Exercice 3. /13

1. 4 pts ; 2 (a) 2 pts, (b) 2 pts, (c) 3 pts ; 3. 2 pts.

Exercice 4. /5

1. 2 pts ; 2. 3 pts.

Problème 1. /20

Partie 1. 1. 4 pts ; 2. (a) 2 pts, (b) 2 pts, (c) 2 pts ; 3. 2 pts ; 4. 2 pts.

Partie 2. 5. 2 pts ; 6. 2 pts ; 7. 2 pts.

Résultats

	Moyenne	**Max**	**Min**
Exercice 1	2,88	8	0
Exercice 2	4,73	9	1
Exercice 3	4,55	8	5
Exercice 4	1,53	5	0
Problème	1,03	4,5	0
P - R	1,18	2	0,5
TOTAL	15,88	27	2,5