EXERCICE 1 (20 min)

QUI SAIT SON COURS NE COURT PAS APRÈS...

1. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$.

2. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\boxed{a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right)}$.

3. $\boxed{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \text{ est inversible si, et seulement si, } ad - bc \neq 0 \text{ et alors } A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.}$

4. Soit E un ensemble de cardinal fini n. D'après le cours $\boxed{|\mathcal{P}(E)| = 2^n}$.

5. Soit E un ensemble de cardinal fini n. Toujours d'après le cours le nombre de permutations de E (ou bijection de E dans E) est $\boxed{n!}$.

6. Avec des quantificateurs : « a est un minorant d'une partie A. » s'écrit $\boxed{\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in A, a \geqslant x}$.

7. Un exemple de partie de $\mathbb{R}$ ayant un majorant mais pas de maximum ni pas de borne inférieure et qui n'est pas un intervalle est $\boxed{A =]-\infty, 0[\cup[1, 2[}$.

EXERCICE 2 (20 min)

DÉNOMBREMENT

1. Combien existe-t-il d'anagramme du mot CONCOURS ?
Le mot CONCOURS comporte 8 lettres dont 6 différentes (le C et le O apparaissent deux fois). En indexant les lettres du mot, chacune des 8! permutations des lettres possible devraient permettre de définir un anagramme. Cependant, les lettres n'étant pas distinctes, plusieurs permutations conduisent au même anagramme. Il y a $2! = 2$ permutations de la lettre C conduisant au même anagramme et de même pour la lettre 0. $\boxed{\text{On obtient donc que le nombre d'anagrammes cherché est } \frac{8!}{4} = 10080.}$

2. Bédis doit piocher avec remise 4 boules dans une urne contenant 7 boules.

(a) Combien y a-t-il de tirages possible ?
$\boxed{\text{Bédis a } 7^4 = 2401 \text{ façons d'effectuer ce tirage.}}$

(b) **Bédis n'a pas écouté et pioche simultanément les 4 boules dans l'urne. Combien y a-t-il de tirages possible alors ?**
$\boxed{\text{Cette fois y a } \binom{7}{4} = \frac{7!}{4! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35 \text{ façons.}}$

EXERCICE 3 (20 min)

UN SYSTÈME À PARAMÈTRE

Soit a un paramètre réel et le système $\begin{cases} x - ay + z & = 2 \\ x + (a+1)z & = 3 \\ x + ay + 3z & = 4 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Discuter en fonction de a du nombre de solutions du système et, quand elles existent, préciser ces solutions.

On écrit la matrice augmentée A_m associée au système : $A_m = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1+a & 3 \\ 1 & a & 3 & 4 \end{array}\right)$.

On échelonne la matrice A_m :

$$A_m \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L1}}{\overset{L}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 1 & 2 \\ 0 & a & a & 1 \\ 0 & 2a & 2 & 2 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L2}{\overset{L}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 1 & 2 \\ 0 & a & a & 1 \\ 0 & 0 & 2(1-a) & 0 \end{array}\right)$$

Les pivots sont 1, a et $2(1-a)$, cherchons quand ils s'annulent.

Si $a=1$: alors la ligne L_3 est compatible et le système a une infinité de solutions, et en prenant z en tant qu'inconnue secondaire :

$$\boxed{\mathcal{S}=\{(3-2z,1-z,z)\mid z\in\mathbb{R}\}}$$

Si $a=0$: alors la ligne L_2 est incompatible et le système n'a pas de solution :

$$\boxed{\mathcal{S}=\emptyset}$$

Si $a\neq 0$ et $a\neq 1$: alors le système admet une unique solution et par remontée on trouve rapidement :

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{\left(3,\frac{1}{a},0\right)\right\}}$$

EXERCICE 4 (1h)

CALCUL DE MATRICES CARRÉES EN PUISSANCE

A désigne la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels définie par :

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

PARTIE A - *Utiliser la formule du binôme de Newton*

On pose $J=\dfrac{1}{4}(A+3I_3)$.

1. **Calculer J puis J^2. En déduire J^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.**
   On trouve $\boxed{J=\dfrac{1}{4}(A+3I_3)=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{J^2=J}$.

2. **Soit $n\in\mathbb{N}^*$, exprimer A en, fonction de J et I_3 et en déduire une expression matricielle de A^n en fonction de n, I_3 et J.**
   On a $A=4J-3I_3$ et donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $A^n=(4J-3I_3)^n$.
   Par la formule du binôme de Newton (les matrices $4J$ et $-3I_3$ commutent) :

$$\begin{aligned}
A^n &= (4J-3I_3)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(4J)^k(-3I_3)^{n-k} \\
&= \binom{n}{0}(4J)^0(-3I_3)^n+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^k(-3)^{n-k}J \\
&= (-3)^nI_3+\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k(-3)^{n-k}-(-3)^n\right)J \\
&= (-3)^nI_3+((4-3)^n-(-3)^n)J \\
&= \boxed{(-3)^nI_3+(1-(-3)^n)J}
\end{aligned}$$

3. **Pour tout n de $\mathbb{N}$, en déduire une écriture matricielle de A^n ne faisant intervenir que l'entier n.**
   On trouve $\boxed{A^n=\begin{pmatrix} 2(-3)^n-1 & 0 & 2(-3)^n-2 \\ 1-(-3)^n & 1 & 1-(-3)^n \\ 1-(-3)^n & 0 & 2-(-3)^n \end{pmatrix}}$

PARTIE B - *Utiliser les matrices inversibles*

4. On pose $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$**. Montrer que** P **est inversible et déterminer** P^{-1}**.**

On applique l'algorithme de Gauss-Jordan à la matrice P :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow -L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow -L_2 - L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } P \text{ est inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.}$$

5. Montrer que $P^{-1}AP = D$ **avec** $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**.**

Un calcul direct suffit : $AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Et donc $P^{-1}AP = P^{-1}(AP) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$

6. (a) **Calculer, pour** $n \in \mathbb{N}$**,** D^n**.**

$$\boxed{D \text{ est une matrice diagonale donc } D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

(b) **Prouver que, pour tout entier naturel** n**,** $D^n = P^{-1}A^nP$**.**

Prouvons par récurrence que pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}_n$ « $D^n = P^{-1}A^nP$ » est vraie :

<u>Initialisation :</u> Pour $n = 0$, $D^0 = I_3$ et $P^{-1}A^0P = P^{-1}I_3P = I_3$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

<u>Hérédité :</u> Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie et montrons $\mathcal{P}_{n+1}$:

$$D^{n+1} = D^n.D = (P^{-1}A^nP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^n(PP^{-1})AP = P^{-1}A^nI_3AP = P^{-1}A^{n+1}P$$

<u>Conclusion :</u> $\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ D^n = P^{-1}A^nP.}$

(c) **En déduire une écriture matricielle de A^n ne faisant intervenir que l'entier n.**
Pour tout entier naturel n,

$$\boxed{D^n = P^{-1}A^nP \Leftrightarrow PD^nP^{-1} = PP^{-1}A^nPP^{-1} \Leftrightarrow A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2(-3)^n - 1 & 0 & 2(-3)^n - 2 \\ 1-(-3)^n & 1 & 1-(-3)^n \\ 1-(-3)^n & 0 & 2-(-3)^n \end{pmatrix}}$$

(*après calcul du double produit matriciel bien entendu, et l'on retrouve le même résultat qu'à la partie A*)

EXERCICE 5 (BONUS)

UN PROBLÈME DE BORNE SUP POUR PASSER EN SPÉ...

Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. On définit $A-B = \{a-b,\ a \in A,\ b \in B\}$.

1. **Montrer que $A - B$ admet une borne supérieure.**
A est bornée donc majorée et non vide donc A admet une borne supérieure notée $\sup(A)$.
B est bornée donc minorée et non vide donc B admet une borne inférieure notée $\inf(A)$.
Pour $a \in A$, on a $a \leqslant \sup(A)$ et pour $b \in B$, $b \geqslant \inf(B)$.
Soit $x \in A + B$. $\exists (a, b) \in A \times B$ tel que $x = a - b$. Donc, $x \leqslant \sup(A) - \inf(B)$.
$\boxed{\text{L'ensemble } A - B \text{ est donc majoré par } \sup(A) \text{ - } \inf(B).}$
$\boxed{\text{Il est non vide et il admet ainsi une borne supérieure } \sup(A - B).}$

2. **Que vaut $\sup(A - B)$? Le prouver rigoureusement.**
Par définition de la borne supérieure comme plus petit des majorants, on a par la question précédent :

$$\sup(A - B) \leqslant \sup(A) - \inf(B).$$

On va montrer l'inégalité dans l'autre sens. Soit $a \in A$ et $b \in B$.

$$\begin{array}{rcl} \forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a - b & \leqslant & \sup(A - B) \\ a & \leqslant & \sup(A - B) + b \\ \text{donc, } \forall b \in B,\ \sup(A) & \leqslant & \sup(A - B) + b \\ \forall b \in B,\ \sup(A - B) + \sup(A) & \leqslant & b \\ \text{donc, } \sup(A - B) + \sup(A) & \leqslant & \inf(B) \\ \text{d'où, } \boxed{\sup(A) - \inf(B)} & \leqslant & \boxed{\sup(A - B)} \end{array}$$

Par double inégalité, on obtient $\boxed{\sup(A - B) = \sup(A) - \inf(B).}$