EXERCICE 1 (compléter sur le sujet)

OBTENIR LES POINTS DU COURS...

1. (a) $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.

(b) **Présenter $\mathbb{U}_n$ en donnant l'expression de ses éléments :** $\mathbb{U}_n = \{e^{i\frac{2\pi k}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}$

(c) **Soit $z = e^{i\theta}$ (avec $\theta \in \mathbb{R}$),** $\boxed{\overline{z} = e^{-i\theta} \quad \frac{1}{z} = e^{-i\theta} \quad -z = e^{i(\theta+\pi)} \quad \text{On a également } |z| = 1}$

(d) **Formules d'Euler :** $\boxed{\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$

2. Soit $Z \in \mathbb{C}$ écrit sous sa forme exponentielle $Z = Re^{i\theta}$.
Donner l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de l'équation $z^n = Z$ ($n \in \mathbb{N}^*$) :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{\sqrt[n]{R}e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n})} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}}$$

3. (a) $\boxed{\int x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2} \, dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)}$

(b) $\boxed{\int \frac{u'(x)}{u(x)} \, dx = \ln|u(x)| \qquad \int u'(x)u(x) \, dx = \frac{1}{2}u(x)^2 \qquad \int \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \, dx = 2\sqrt{u(x)}}$

4. (a) **L'ensemble des solutions de $(E) : y' + ay = 0$ est** $\boxed{\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} \to Ce^{-ax} \mid C \in \mathbb{R}\}.}$

(b) **L'ensemble des solutions de $(F) : y'' + \omega^2 y = 0$ est** :
$\boxed{\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} \mapsto C_1\cos(\omega x) + C_2\sin(\omega x) \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}.}$

EXERCICE 2

DES INTÉGRALES EN PAGAILLE...

1. Calculer :

a) $\boxed{\int_1^e \frac{\ln t}{t} \, dt = \int_1^e \frac{1}{t}.\ln t \, dt = \left[\frac{1}{2}(\ln(t))^2\right]_1^e = \frac{1}{2} \text{ (forme } u'u)}$

b) $\boxed{\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} \, dx = \left[\frac{1}{2}\sqrt{1+2x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) \text{ (forme } \tfrac{1}{4}\tfrac{u}{\sqrt{u}})}$

c) $\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(t)\sin^2(t) \, dt = \left[\frac{1}{3}\sin(t)^3\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{12} \text{ (forme } u'u^2)}$

d) $\int_0^\pi e^{2x}\cos(x) \, dx = \int_0^\pi \mathrm{Re}(e^{2x}e^{ix}) \, dx = \mathrm{Re}\left(\int_0^\pi e^{(2+i)x} \, dx\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{1}{2+i}e^{(2+i)x}\right]_0^\pi\right)$

Donc $\boxed{\int_0^\pi e^{2x}\cos(x) \, dx = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2+i}(e^{(2+i)\pi} - 1)\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{2-i}{5}(e^{(2+i)\pi} - 1)\right) = -\frac{2}{5}(e^{2\pi} + 1)}$

2. A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t}$, calculer $\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}$ dt.

On pose $u = \sqrt{t}$, donc d$u = \frac{1}{2\sqrt{t}}$dt soit d$t = 2u$du et $t \in [1, 2] \Leftrightarrow u \in [1, \sqrt{2}]$ donc :

$$\boxed{\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} \, dt = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\ln u^2}{u}.2u \, du = \int_1^{\sqrt{2}} 4\ln u \, du = 4\left[u\ln u - u\right]_1^{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\ln 2 - 4\sqrt{2} + 4}$$

3. Calculer $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-5x+7}$, puis $\displaystyle\int_1^3 \frac{x+1}{x^2-5x+7}\ \mathrm{d}x$.

$$\boxed{\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-5x+7} = \int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \left[\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arctan\left(\frac{x-\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right]_1^3 = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-5}{\sqrt{3}}\right)\right]_1^3 = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}}$$

Ainsi :

$$\int_1^3 \frac{x+1}{x^2-5x+7}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{2x+2}{x^2-5x+7}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{2x-5}{x^2-5x+7}\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{7}{x^2-5x+7}\ \mathrm{d}x$$

Et donc :

$$\boxed{\int_1^3 \frac{x+1}{x^2-5x+7}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\ln|x^2-5x+7|\right]_1^3\ \mathrm{d}x + \frac{7}{2}.\frac{\pi\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{2}\ln 3 + \frac{7\pi\sqrt{3}}{6}}$$

EXERCICE 3

ET DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES EN FOLIE...

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_1)\ :\ (1-x)y'+xy=e^x$ sur $I=]1,+\infty[$.

<u>On résout l'équation homogène associée $(H)\ :\ (1-x)y'+xy=0$ sur $I=]1,+\infty[$.</u>

On pose $a(x)=\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{x-1}{1-x}+\dfrac{1}{1-x}=-1+\dfrac{1}{1-x}$ et donc $A(x)=-x-\ln|1-x|=-x-\ln(x-1)$.

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y_H=Ce^{x+\ln(x-1)}=C(x-1)e^x$ avec $C\in\mathbb{R}$.

<u>On détermine une solution particulière à l'aide de la méthode variation de la constante :</u>

$y_P(x)=C(x)e^{-A(x)}$ avec $C'(x)=b(x)e^{A(x)}=\dfrac{e^x}{1-x}\times e^{-x-\ln(x-1)}=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ donc $C(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

Finalement $y_P(x)=\dfrac{1}{1-x}\times(x-1)e^x=e^x$ (on aurait pu voir que cette solution était évidente) et :

$$\boxed{\mathcal{S}_I(E_1)=\{x\in I\mapsto (C(x-1)+1)e^x\ |\ C\in\mathbb{R}\}}$$

2. Résoudre l'équation différentielle $(E_2)\ :\ y''+y'-2y=e^t+\cos(2t)$.

<u>On résout l'équation homogène associée $(H)\ :\ y''+y'-2y=0$ sur $\mathbb{R}$.</u>

L'équation caractéristique vaut $r^2+r-2=0$ de racines $r_1=-2$ et $r_2=1$.

Les solutions de (H) sont de la forme $y_H(t)=C_1e^t+C_2e^{-2t}$ avec $C_1,C_2\in\mathbb{R}$.

<u>On détermine une solution particulière en deux temps avec le principe de superposition :</u>

• Pour $y''+y'-2y=e^t$, on cherche une solution de la forme : $y_P(t)=Ate^t$.

(*car $\lambda=1$ est solution de l'équation caractéristique.*)

$$\begin{cases} y_P(t)=Ate^t \\ y_P'(t)=A(t+1)e^t \\ y_P''(t)=A(t+2)e^t \end{cases} \Rightarrow y_P''+y_P'-2y_P=[A(t+2)+A(t+1)-2At]e^t=3Ae^t=e^t \text{ soit } A=\frac{1}{3}.$$

• Pour $y''+y'-2y=\cos(2t)$, on cherche une solution de la forme : $y_P(t)=C\cos(2t)+D\sin(2t)$.

(*car $\lambda=2i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique.*)

$$\begin{cases} y_P(t)=C\cos(2t)+D\sin(2t) \\ y_P'(t)=-2C\sin(2t)+2D\cos(2t) \\ y_P''(t)=-4C\cos(2t)-4D\sin(2t) \end{cases}$$

Donc

$$y_P''+y_P'-2y_P=[-2C+2D-4C]\cos(2t)+[-2D-2C-4D]\sin(2t)=[-6C+2D]\cos(2t)+[-2C-6D]\sin(2t)$$

Soit $\begin{cases} -6C+2D=1 \\ -2C-6D=0 \end{cases}$ et donc $C=-\dfrac{3}{20}$ et $D=\dfrac{1}{20}$.

Finalement l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(E_2)=\{C_1e^t+C_2e^{-2t}+\frac{1}{3}te^t-\frac{3}{20}\cos(2t)+\frac{1}{20}\sin(2t)\mid C_1,C_2\in\mathbb{R}\}}$$

3. Soit (E_3) l'équation différentielle $xy''-(1+x)y'+y=1$.

(a) **Soit y une solution de (E_3). On pose $z=y-y'$.**
Montrer que z est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 que l'on donnera.
z est dérivable sur $\mathbb{R}$ vu que y est deux fois dérivable et $z'=y'-y''$ et on a alors :

$$(E_3)\Leftrightarrow xy''-(1+x)y'+y=1\Leftrightarrow xy''-xy'-y'+y=1\Leftrightarrow -x(y'-y'')+(y-y')=1\Leftrightarrow -xz'+z=1$$

$\boxed{z \text{ est donc solution de l'équation différentielle du premier ordre } xz'-z=-1.}$

(b) **Résoudre cette nouvelle équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ puis résoudre (E_3) sur $\mathbb{R}_+^*$.**
Sur $\mathbb{R}_+^*$, $xz'-z=-1\Leftrightarrow z'-\dfrac{1}{x}z=-\dfrac{1}{x}$ notée (F).
Pour l'équation homogène (H) : $z'-\dfrac{1}{x}z=0$, on pose $a(x)=-\dfrac{1}{x}$ de primitive $A(x)=-\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\boxed{\text{Les solutions homogène sont } z_H(x)=Ce^{-A(x)}=Cx \text{ avec } \in\mathbb{R}.}$
Une solution particulière est $z_P(x)=1$ et donc l'ensemble des solutions de (F) est :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+^*}(F)=\{z:x\in\mathbb{R}_+^*\mapsto Cx+1\mid C\in\mathbb{R}\}}$$

Reste à résoudre (E_3), c'est à dire trouver l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y-y'=Cx+1$ ($C\in\mathbb{R}$ fixé) soit $y'-y=-(Cx+1)$ ($C\in\mathbb{R}$ fixé).
Pour l'équation homogène (H) : $y'-y=0$, on pose $a(x)=-1$ de primitive $A(x)=-x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\boxed{\text{Les solutions homogène sont } y_H(x)=De^x \text{ avec } D\in\mathbb{R}.}$
On trouve une solution particulière à l'aide la méthode de variation de la constante :

$$y_P(x)=D(x)e^x \text{ avec } D'(x)=b(x)e^{A(x)}=-(Cx+1)e^{-x}$$

Une intégration par partie permet de trouver que $D(x)=(Cx+C+1)e^{-x}$ soit $y_P(x)=Cx+C+1$ et finalement :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+^*}(E_3)=\{x\in\mathbb{R}_+^*\mapsto De^x+C(x+1)+1\mid C,D\in\mathbb{R}^2\}}$$

(c) **(E_3) admet-elle une solution sur $\mathbb{R}$?**
On a : $\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+^*}(E_3)=\{x\in\mathbb{R}_+^*\mapsto D_1e^x+C_1(x+1)+1\mid C_1,D_1\in\mathbb{R}^2\}$.
De même : $\mathcal{S}_{\mathbb{R}_-^*}(E_3)=\{x\in\mathbb{R}_-^*\mapsto D_2e^x+C_2(x+1)+1\mid C_2,D_2\in\mathbb{R}^2\}$.
Il suffit de recoller par continuité et double dérivabilité les deux morceaux de la fonction en 0 et on trouve que nécessairement $C_1=C_2$ et $D_1=D_2$.
Finalement les solutions de (E_3) sur $\mathbb{R}$ sont :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(E_3)=\{x\in\mathbb{R}\mapsto De^x+C(x+1)+1\mid C,D\in\mathbb{R}^2\}}$$

EXERCICE 4

MAIS PAS DE COMPLEXES AVEC LES COMPLEXES...

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (-2+i)z + 1 + i = 0$.

L'équation aurait du être $z^2 + (-2+i)z + 1 - i = 0$ de racines $x = 1 - i$ et $x = 1$... mais elle était quand même résolvable.

On calcule le discriminant qui vaut $\Delta = b^2 - 4ac = -1 - 8i$.

On calcule ensuite les racines carrées (*qui sont compliquées*) : $\delta = \pm \left(\frac{\sqrt{2(\sqrt{65}-1)}}{2} - \frac{\sqrt{2(\sqrt{65}+1)}}{2} \right)$

Puis les racines de l'équation :

$$\boxed{z_1 = \frac{\sqrt{2(\sqrt{65}-1)}+4}{4} - \frac{\sqrt{2(\sqrt{65}+1)}+2}{4} \text{ et } z_2 = \frac{-\sqrt{2(\sqrt{65}-1)}+4}{4} + \frac{\sqrt{2(\sqrt{65}+1)}-2}{4}}$$

2. Linéariser $\cos^2(\theta)\sin(\theta)$.

$$\begin{aligned}
\cos^2(\theta)\sin(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2 \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right) \\
&= \frac{1}{8i}(e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta})(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\
&= \frac{1}{8i}(e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta})(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\
&= \frac{1}{8i}(e^{3i\theta} + 2e^{i\theta} + e^{-i\theta} - e^{i\theta} - 2e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}) \\
&= \frac{1}{8i}(2i\sin(3\theta) + 2i\sin(\theta)) \\
&= \boxed{\frac{1}{4}(\sin(3\theta) + \sin(\theta))}
\end{aligned}$$

3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}\backslash\{a\}$, on pose $Z = \frac{\overline{z} - a}{a - z}$. Que vaut $|Z|$?

Remarquons que $\overline{a - z} = \overline{a} - \overline{z} = a - \overline{z}$ donc le dénominateur est l'opposé du conjugué du numérateur.

$\boxed{\text{On en déduit que } |\overline{z} - a| = |a - z| \text{ et ainsi } |Z| = 1.}$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note (E_n) l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$.

(a) **On se propose de montrer que les solutions de (E_n) sont réelles sans résoudre l'équation (E_n).**
Prouver que si z est solution de (E_n) alors $|z - i| = |z + i|$ et conclure.
Si z est solution de (E_n) alors $|(z+i)^n| = |(z-i)^n|$ et donc $|z+i|^n = |z-i|^n$ et comme la fonction $x \mapsto x^n$ est bijective sur $\mathbb{R}^+$ alors $|z - i| = |z + i|$.
Graphiquement l'égalité $|z - i| = |z + i|$ signifie que le point M d'affixe z est équidistant des points A d'affixe i et B d'affixe $-i$, ainsi :
$\boxed{M \text{ est sur la médiatrice du segment } [AB] \text{ qui est confondue avec l'axe } (Ox) \text{ donc } z \in \mathbb{R}.}$

(b) **Résoudre (E_n) et vérifier que les solutions obtenues sont toutes bien réelles.**
(*donner une expression des solutions la plus simple possible à l'aide de* tan).

Comme $z = i$ n'est pas solution de (E_n) alors :

$$\begin{aligned}
(E_n) &\Leftrightarrow \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = 1 \\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!],\ \frac{z+i}{z-i} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!],\ z + i = (z-i)e^{i\frac{2k\pi}{n}} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!],\ z\left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = -i\left(1 + e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) \\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!],\ z = -i\frac{1 + e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!],\ z = -i\frac{e^{i\frac{k\pi}{n}}}{e^{i\frac{k\pi}{n}}}.\frac{e^{-i\frac{k\pi}{n}} + e^{i\frac{k\pi}{n}}}{e^{-i\frac{k\pi}{n}} - e^{i\frac{k\pi}{n}}} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!],\ z = \frac{2\cos\frac{k\pi}{n}}{2\sin\frac{k\pi}{n}} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!],\ z = \frac{1}{\tan\frac{k\pi}{n}}
\end{aligned}$$

Finalement $\boxed{\mathcal{S}_n = \{\tan\frac{k\pi}{n} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}.}$

EXERCICE 5

POUR FINIR UNE INTÉGRALE QUI A DE LA SUITE DANS LES IDÉES !

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\ \mathrm{d}t$.

1. En remarquant que $\sqrt{1-t} = (1-t)^{\frac{1}{2}}$, calculer I_0.

$$\boxed{I_0 = \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.}$$

2. A l'aide d'une intégration par partie, montrer que pour $n \geqslant 1$, $I_n = \dfrac{2n}{2n+3}I_{n-1}$.

On pose $u(t) = t^n$ et $v'(t) = \sqrt{1-t}$ alors $u'(t) = nt^{n-1}$ et $v(t) = -\dfrac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}} = -\dfrac{2}{3}(1-t)\sqrt{1-t}$. Alors, par intégration par partie pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\ \mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{2t^n}{3}(1-t)\sqrt{1-t}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-2nt^{n-1}}{3}(1-t)\sqrt{1-t}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{2n}{3}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)\sqrt{1-t}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{2n}{3}\int_0^1 (t^{n-1} - t^n)\sqrt{1-t}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{2n}{3}(I_{n-1} - I_n)
\end{aligned}$$

On a alors $I_n + \dfrac{2n}{3}I_n = \dfrac{2n}{3}I_{n-1}$ soit $\dfrac{2n+3}{3}I_n = \dfrac{2n}{3}I_{n-1}$ et finalement $\boxed{\text{pour } n \geqslant 1,\ I_n = \dfrac{2n}{2n+3}I_{n-1}.}$

3. En déduire une expression de I_n à l'aide de factorielles. (*rappel :* $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$)

Par récurrence descente on obtient facilement que :

$$I_n = \frac{2n}{2n+3}I_{n-1} = \frac{2n}{2n+3} \times \frac{2n-2}{2n+1}I_{n-2} = \frac{2n.(2n-2) \times \ldots \times 2}{(2n+3).(2n+1) \times \ldots \times 3}I_0$$

On fait apparaitre une factorielle au dénominateur en multipliant par les entiers pairs, ainsi qu'au numérateur puis on factorise par 2 dans chaque terme du numérateur :

$$\boxed{I_n = \frac{(2n.(2n-2)\times\ldots\times 2)^2}{(2n+3).(2n+2).(2n+1)\times\ldots\times 3\times 2}I_0 = \frac{2^{2n}(n.(n-1)\times\ldots\times 1)^2}{(2n+3)!}I_0 = \frac{2}{3}.\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+3)!}}$$

EXERCICE 6 (à n'aborder que si le reste a été traité)
EST-CE RÉELLEMENT UN COMPLEXE ?

Soient a, b et z trois nombres complexes de module 1. Montrer que : $\dfrac{b}{a}\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)^2 \in \mathbb{R}^+$.

Rappelons que si u est un complexe de module A alors $\dfrac{1}{u} = \overline{u}$, on a alors :

$$(z-a)^2 = (z-a)\left(\frac{1}{\overline{z}} - \frac{1}{\overline{a}}\right) = \frac{(z-a)(\overline{a}-\overline{z})}{\overline{a}\overline{z}} = -a\frac{|z-a|^2}{\overline{z}}$$

De même $(z-b)^2 = -b\dfrac{|z-b|^2}{\overline{z}}$ et donc :

$$\boxed{\frac{b}{a}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^2 = \frac{b}{a}\times\frac{-a\dfrac{|z-a|^2}{\overline{z}}}{-b\dfrac{|z-b|^2}{\overline{z}}} = \frac{|z-a|^2}{|z-b|^2} \in \mathbb{R}_+^*}$$