Devoir surveillé 9

Consignes :

- Calculatrice interdite.
- Ne mélanger pas les exercices, une nouvelle copie pour chaque exercice.
- Numéroter chaque copie et mettre son nom sur chaque feuille.
- Encadrer les résultats.
- Les phrases d'explications courtes et claires avant tout calcul peut permettre de gagner des points.
- Les copies dont la propreté et la présentation laissent à désirer seront sanctionnées (Les ratures et les plaques de blanc correcteur sont à bannir).

Exercice 1.

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. On se propose de montrer que la suite (S_n) converge et de préciser sa limite.

1. Démontrer, sans utiliser une récurrence, que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin(\frac{t}{2})}.$$
2. Montrer qu'il existe de réels a et b tel que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\pi} (at + bt^2)\cos(kt)\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}.$$
3. On définit $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ par $\forall t \in]0, \pi]$, $g(t) = \frac{at+bt^2}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ et $g(0) = 2a$ (on reprend les valeurs déterminées à la question précédente).
   (a) Montrer que g est continue en 0.
   (b) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.
4. Montrer que pour toute fonction h de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, on a
$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^{\pi} \sin(\lambda t)\, h(t)\mathrm{d}t = 0.$$
5. Rassemblant les résultats précédents, démontrer que
$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 2.

Soit n un entier supérieur à 2 et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on se propose d'étudier les solutions de l'équation matricielle
$$M^2 = A,$$
dans un premier temps sur deux exemples, puis dans un second temps quelques résultats plus généraux.

Les trois premières parties sont indépendantes, on peut admettre les résultats des parties précédentes, pour traiter la dernière.

Partie I : $A = I_2$

1. Soit E une espace vectoriel et h un endomorphisme de E vérifiant $h^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2}$, en donner une interprétation géométrique.
2. Justifier que l'équation $M^2 = I_2$ possède une infinité de solutions, on donnera 2 solutions distinctes, dont au moins une ne sera pas un matrice diagonale. On précisera les éléments caractéristiques de l'endomorphisme associé à la solution non diagonale.

Partie II : Un second exemple

Pour cette partie, on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé.

3. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de λ, l'application $f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2}$ n'est pas injective.
4. Montrer que $F_1 = \mathrm{Ker}\ (f - \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2})$ et $F_4 = \mathrm{Ker}\ (f - 4\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2})$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^2$ supplémentaires.

   On donnera une base adaptée $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ à ces deux sous-espaces vectoriels, la première composante de chaque vecteur de la base devra être égale à 1.
5. Déterminer les 2 matrices de changement associées à $\mathcal{B}'$ et la base canonique.
6. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ qui commute avec f. Soit $k \in \{1, 4\}$, montrer que F_k est stable par g. (C'est-à-dire $g(F_k) \subset F_k$)
7. Soit M une solution à $M^2 = A$ et h l'endomorphisme canoniquement associé M.
   (a) Justifier que h commute avec f.
   (b) Pour $k \in \{1, 4\}$, déterminer les valeurs possibles de $h(e_k)$.
   (c) Déterminer les matrices dans $\mathcal{B}'$ des applications h solutions à $h^2 = f$.
8. Montrer que l'équation $M^2 = A$ possède un nombre fini de solutions que l'on explicitera.

Partie III : Matrices nilpotentes

On rappelle que f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ est nilpotent, si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0_{\mathrm{L}(E)}$, dans ce cas, on appelle l'indice de nilpotence de f le plus petit p tel que $f^p = 0_{\mathrm{L}(E)}$.

On définit de même, la nilpotence d'une matrice A, si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$, dans ce cas, on appelle l'indice de nilpotence de A le plus petit p tel que $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

8. Justifier que si f est endomorphisme de E nilpotent d'indice p, alors il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$. Pour un tel x_0, montrer que la famille $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{p-1}(x_0))$ est libre.
9. En déduire une inégalité entre l'indice de nilpotence d'un endomorphisme et la dimension de l'espace E.
10. On suppose que A est une matrice carré d'ordre n nilpotente d'indice p avec $p > \frac{n+2}{2}$. Montrer que l'équation $M^2 = A$ n'a pas de solution.

Partie IV : Matrices de rang 1

Soit A une matrice de rang 1, on se propose de démontrer que $M^2 = A$ a une solution si et seulement si $\mathrm{Im}\, A \cap \mathrm{Ker}\, A = \{0_{\mathbb{C}^n}\}$. On notera f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

11. Supposons que $\mathrm{Im}\, A \cap \mathrm{Ker}\, A \neq \{0_{\mathbb{C}^n}\}$ et qu'il existe une matrice M tel que $M^2 = A$. On notera h l'endomorphisme canonique associé à M. On a donc $f = h^2$.
    (a) Justifier que $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$.
    (b) Justifier que $\mathrm{Im}\, f$ est stable par h.
    (c) Montrer que h restreint à $\mathrm{Im}\, f$ est un endomorphisme de $\mathrm{Im}\, f$ nilpotent d'indice supérieur ou égale à 3.

(d) Conclure.

12. On suppose maintenant $\operatorname{Im} A \cap \operatorname{Ker} A = \{0_{\mathbb{C}^n}\}$
    (a) Justifier que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires.
    (b) Représenter la matrice de f dans une base adaptée la somme directe $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$
    (c) En déduire qu'il existe une endomorphisme de h de $\mathbb{C}^n$ tel que $h^2 = f$.
13. Conclure.