# Devoir surveillé 9

**Exercice 1.**

1. En utilisant les nombres complexes, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ikt}\right).$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ikt} = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{it}\right)^k = \frac{\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{i(n+1)t}}{1-\mathrm{e}^{it}} \cdot \quad (\text{car } \mathrm{e}^{it} \neq 1, \text{ si } t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\})$$

En utilisant les formules d'Euler, on a

$$\frac{\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{i(n+1)t}}{1-\mathrm{e}^{it}} = \mathrm{e}^{i\frac{n+1}{2}t} \frac{\sin\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

En passant à la partie réelle et en utilisant le formulaire trigonométrique pour linéariser, on a donc

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)\sin\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

On conclut donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin(\frac{t}{2})}.}$$

2. Par intégration par partie, on a

$$U_k = \int_0^\pi (at+bt^2)\cos(kt)\mathrm{d}t = \left[\frac{at+bt^2}{k}\sin(kt)\right]_0^\pi - \frac{1}{k}\int_0^\pi (a+2bt)\sin(kt)\mathrm{d}t,$$

avec $\left\{ \begin{array}{ll} u(t) = at+bt^2 & u'(t) = a+2bt \\ v'(t) = \cos(kt) & v(t) = \frac{1}{k}\sin(kt) \end{array} \right.$.

Soit par une seconde intégration par partie

$$U_k = -\frac{1}{k}\int_0^\pi (a+2bt)\sin(kt)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{k^2}(a+2bt)\cos(kt)\right]_0^\pi - \frac{1}{k^2}\int_0^\pi 2b\cos(kt)\mathrm{d}t,$$

avec $\left\{ \begin{array}{ll} u(t) = a+2bt & u'(t) = 2b \\ v'(t) = \sin(kt) & v(t) = -\frac{1}{k}\cos(kt) \end{array} \right.$.

Comme $\displaystyle\int_0^\pi \cos(kt)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{k}\sin(kt)\right]_0^\pi = 0$, on a donc

$$\begin{aligned} U_k = \left[\frac{1}{k^2}(a+2bt)\cos(kt)\right]_0^\pi &= \frac{1}{k^2}\left[(a+2b\pi)\cos(k\pi) - a\cos(k\cdot 0)\right] \\ &= \frac{1}{k^2}\left[(a+2b\pi)(-1)^k - a\right] \end{aligned}$$

Si on pose $a=-1$ et $b=\frac{1}{2\pi}$, on a alors

$$U_k = \frac{1}{k^2}.$$

On a donc

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\pi} (-t + \frac{1}{2\pi}t^2)\cos(kt)\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}.}$$

3. On définit $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ par $\forall t \in ]0, \pi]$, $g(t) = \dfrac{-t+\frac{1}{2\pi}t^2}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}$ et $g(0) = -2$.

   (a) Pour $t \neq 0$, on a

$$g(t) = \frac{-t + \frac{1}{2\pi}t^2}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}.$$

   Par ailleurs les équivalents usuels donnent

$$-t + \frac{1}{2\pi}t^2 \underset{t\to 0}{\sim} -t \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{t}{2}\right) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{2},$$

   on en déduit que

$$g(t) \underset{t\to 0, t\neq 0}{\sim} \frac{-t}{\frac{t}{2}} = -2.$$

   On conclut

$$\boxed{g \text{ est continue en } 0.}$$

   (b) Par les règles usuelles de composition, la fonction $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$. Pour $t \neq 0$, les dérivées usuelles nous donnent

$$g'(t) = \frac{(-1 + \frac{t}{\pi})\sin\left(\dfrac{t}{2}\right) - (-t + \dfrac{t^2}{2\pi}) \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \cos\left(\dfrac{t}{2}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right)}.$$

   Les développements limités usuels donnent

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{t}{2}\right) &= \frac{t}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2) \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) &= 1 - \frac{t^2}{8} + \underset{t\to 0}{o}(t^2). \end{aligned}$$

   On en déduit

$$\begin{aligned} (-1 + \frac{t}{\pi})\sin\left(\frac{t}{2}\right) &= (-1 + \frac{t}{\pi})\frac{t}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2) = -\frac{t}{2} + \frac{t^2}{2\pi} + \underset{t\to 0}{o}(t^2) \\ (-t + \frac{t^2}{2\pi}) \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right) &= \frac{1}{2}(-t + \frac{t^2}{2\pi})(1 - \frac{t^2}{8}) + \underset{t\to 0}{o}(t^2) = -\frac{t}{2} + \frac{t^2}{4\pi} + \underset{t\to 0}{o}(t^2). \end{aligned}$$

   On rassemble donc en

$$(-1 + \frac{t}{\pi})\sin\left(\frac{t}{2}\right) - (-t + \frac{t^2}{2\pi}) \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{t^2}{4\pi} + \underset{t\to 0}{o}(t^2),$$

   soit

$$(-1 + \frac{t}{\pi})\sin\left(\frac{t}{2}\right) - (-t + \frac{t^2}{2\pi}) \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2}{4\pi}.$$

   Par ailleurs, on a $\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{4}$, ce qui implique

$$g'(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\frac{t^2}{4\pi}}{\frac{t^2}{4}} = \frac{1}{\pi}.$$

Il en résulte $\lim\limits_{t\to 0} g'(t) = \dfrac{1}{\pi}$, Comme $g$ est continue en 0 et que sa dérivée admet une limite en 0, par le théorème de limite de la dérivée, on conclut que la fonction $g$ est dérivable en 0 et de dérivée continue en 0.

$$\boxed{g' \text{ est continue sur } [0,\pi], \text{ donc } g \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,\pi].}$$

4. Comme $h$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, on peut effectuer une intégration par parties avec $\begin{cases} u(t) = h(t) & u'(t) = h(t) \\ v'(t) = \sin(\lambda t) & v(t) = -\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda t) \end{cases}$, soit

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin(\lambda t)\, h(t)\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda t)\, h(t)\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{\lambda}\cos(\lambda t)\, h'(t)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{\lambda}h(\pi)\cos(\frac{1}{\lambda}h(\pi) + \frac{1}{\lambda}h(0) + \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) h'(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On en déduit, en utilisant l'inégalité triangulaire et les majorations d'intégrales

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\pi \sin(\lambda t)\, h(t)\mathrm{d}t\right| &\leq \frac{1}{\lambda}|h(\pi)| + \frac{1}{\lambda}|h(0)| + \frac{1}{\lambda}\left|\int_0^\pi \cos(\lambda t)\, h'(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\left(|h(\pi)| + |h(0)| + \int_0^\pi |\cos(\lambda t)|\, h'(t)\right)\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\left(|h(\pi)| + |h(0)| + \int_0^\pi |h'(t)|\,\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

L'intégrale $\int_0^\pi |h'(t)|\,\mathrm{d}t$ a bien un sens, car $h'$ est continue sur $[0,\pi]$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\lambda} = 0$ et que la quantité $\left(|h(\pi)| + |h(0)| + \displaystyle\int_0^\pi |h'(t)|\,\mathrm{d}t\right)$ est indépendante de $\lambda$, on a donc par le théorème des gendarmes

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left|\int_0^\pi \sin(\lambda t)\, h(t)\mathrm{d}t\right| = 0.$$

On conclut donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \sin(\lambda t)\, h(t)\mathrm{d}t = 0.}$$

5. Grâce à la question 2, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right)\cos(kt)\mathrm{d}t.$$

Il en résulte par linéarité de l'intégrale et en factorisant par $\left(-t + \dfrac{t^2}{2\pi}\right)$,

$$S_n = \int_0^\pi \left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right)\left(\sum_{k=1}^n \cos(kt)\right)\mathrm{d}t.$$

Puis en utilisant la question 1,

$$S_n = \int_0^\pi \left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right)\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t,$$

soit

$$S_n = \int_0^\pi \left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right) \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \mathrm{d}t - \int_0^\pi \left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right) \frac{1}{2} \mathrm{d}t.$$

On a donc

$$S_n = \frac{1}{2} \int_0^\pi g(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) \mathrm{d}t - \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right) \mathrm{d}t.$$

Grâce à la question 3, la fonction $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, on peut donc appliquer le résultat de la question 4 et on a

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^\pi g(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) \mathrm{d}t = 0.$$

On a donc

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right) \mathrm{d}t.$$

On calcule alors cette intégrale

$$\int_0^\pi \left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right) \mathrm{d}t = \left[\frac{-t^2}{2} + \frac{t^3}{6\pi}\right]_0^\pi = -\frac{\pi^2}{3}.$$

On conclut donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}.}$$

**Exercice 2.**

Soit $n$ un entier supérieur à 2 et $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on se propose d'étudier les solutions de l'équation matricielle

$$M^2 = A,$$

dans un premier temps sur deux exemples, puis quelques résultats plus généraux.

Les trois premières parties sont indépendantes, on peut admettre les résultats des parties précédentes, pour traiter la dernière.

**Partie I :** $A = I_2$

1. Un endomorphisme vérifiant $h^2 = \mathrm{Id}_E$ est une symétrie vectorielle par rapport à $\mathrm{Ker}\,(h - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(h + \mathrm{Id}_E)$.
2. Une matrice $M$ représentant une symétrie de $\mathbb{C}^2$ aura une base donnée vérifiera $M^2 = I_2$. Comme il existe une infinité de symétries distinctes, par $s_a$ la symétrie par rapport à la droite $\mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ parallèlement à la droite $\mathbb{C}\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{C}$.

   Deux solutions

   $$\boxed{M_1 = I_2 \text{ et } M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

   L'endomorphisme canoniquement associé à $M_2$ est la symétrie par rapport à la droite $\mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallèlement à la droite $\mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

**Partie II : Un second exemple**

Pour cette partie, on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

et $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé.

3. Considérons la matrice de l'application $f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2}$ dans la base canonique etdéterminons pour quelle valeur de $\lambda$, le rang chute

$$\mathrm{rg}\,(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1-(3-\lambda)\cdot\frac{2-\lambda}{2} \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & \frac{-\lambda^2+5\lambda-4}{2} \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Le rang chute, si et seulement si $-\lambda^2 + 5\lambda - 4 = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\text{l'application } f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2} \text{ est non injective, si et seulement si } \lambda \in \{1, 4\}.}$$

4. Déterminons les solutions à $(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2})(x, y) = (0, 0)$, on obtient le système

$$\begin{cases} x + y & = & 0 \\ 2x + 2y & = & 0, \end{cases}$$

on conclut

$$\boxed{\mathrm{Ker}\ (f - \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2}) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Déterminons les solutions à $(f - 4\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2})(x, y) = (0, 0)$, on obtient le système

$$\begin{cases} -2x + y & = & 0 \\ 2x - y & = & 0, \end{cases}$$

on conclut

$$\boxed{\mathrm{Ker}\ (f - 4\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2}) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

On obtient donc que $F_1$ et $F_4$ sont deux droites vectorielles distinctes (vecteurs directeurs non colinéaires) dans un espace dimension 2 donc elles sont supplémentaires et on conclut

$$\boxed{F_1 \oplus F_4 = \mathbb{C}^2 \text{ et } \mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base adaptée à cette somme.}}$$

5. On écrit directement $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}_c}(\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. On calcul l'inverse de la manière que l'on préfère et on obtient

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}$$

6. Pour $k \in \{1, 4\}$ et $x \in E_k$, on a $f(x) = k\,x$. Comme $f$ et $g$ commute, on en déduit

$$g(x) = g\left(\frac{1}{k} k\,x\right) = \frac{1}{k} g(k\,x) = \frac{1}{k} g(f(x)) = \frac{1}{k} f(g(x)),$$

soit $f(g(x)) = kg(x)$, d'où $g(x) \in \mathrm{Ker}\ (f - k\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2}) = F_k$. On conclut

$$\boxed{\forall k \in \{1,4\}, \quad g(F_k) \subset F_k.}$$

7. (a) On a
$$AM = M^2M = M\,M^2 = M\,A.$$
Par isomorphisme entres les matrices et la applications linéaires, les matrices de $h$ et $f$ commutent, on conclut donc
$$\boxed{h \text{ commutent avec } f.}$$
(b) Pour $k \in \{1,4\}$, comme $e_k \in F_k$ et $h$ et $f$ commutent, on a donc $h(e_k) \in F_k$. Comme $F_k = \mathbb{C}e_k$, il existe donc $\lambda_k \in \mathbb{C}$ tel que $h(e_k) = \lambda_k e_k$. Puis comme $h^2 = f$ et $f(e_k) = ke_k$, on a donc $h^2(e_k) = ke_k$. Il résulte que $\lambda_k^2 = k$. On conclut que si $h$ est une solution à $h^2 = f$, on a
$$\boxed{\forall k \in \{1,4\}, \quad h(e_k) = \pm\left(\sqrt{k}\right) \mathrm{e}_k.}$$
(c) La matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Grâce à la question précédentes, on obtient les matrices de solutions potentielles, on vérifie qu'elles marchent, les matrices des solutions à $h^2 = f$ sont donc
$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.}$$

8. Si $M$ est une solution à $M^2 = A$, son endomorphisme canoniquement associé $h$ vérifie $h^2 = f$. On a déterminé 4 solutions possibles pour $h$. Il suffit de multiplier par les matrices de changement de base. On calcule
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$
Les 2 autres solutions sont obtenues en multipliant par -1 et on conclut les solutions $M^2 = A$ sont
$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.}$$

**Partie III : Matrices nilpotentes**

9. Comme l'endomorphisme $f$ est nilpotent d'indice $p$, on a donc $f^{p-1} \neq 0_{L(E)}$ ($p$ est la plus petite puissance d'itération qui donne l'endomorphisme nul). Il existe donc $x_0$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$. Soit $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ tel que
$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x_0) = 0_E.$$
Comme $f$ est nilpotent d'indice $p$ en appliquant $f^(p-1)$, on obtient
$$\lambda_0 f^{p-1}(x_0) + \lambda_1 f^p(x_0) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{2p-2}(x_0) = \lambda_0 f^{p-1}(x_0) = 0_E.$$
Comme $f^{p-1}(x_0) \neq 0$, on a donc $\lambda_0 = 0$. En itérant le procédé, on annule successivement chacun de coefficients du $p$-uplets $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{p-1})$. On conclut donc
$$\boxed{\text{la famille } (x_0, f(x_0), \cdots, f^{p-1}(x_0)) \text{ est libre.}}$$

10. Si $f$ est un endomorphisme nilpotent d'indice $p$, alors il existe $x_0$ tel que la famille $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{p-1}(x_0))$ est libre, donc son cardinal doit être inférieur à la dimension de l'espace. On conclut donc

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est un endomorphisme nilpotent d'indice } p, \text{ alors } p \leq \dim E.}$$

11. Soit $A$ matrice d'indice $p$ de nilpotence supérieur strictement à $\frac{n+2}{2}$.
Considérons $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associée à $A$. Supposons qu'il existe $M$ tel que $M^2 = A$ et considérons $h$ sont endomorphisme canonique associé. On a donc $h^2 = f$.
On a $h^{2p} = f^p = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc $h$ est nilpotent. De plus $h^{2p-2} = f^{p-1} \neq 0_{L(E)}$, l'indice de nilpotence de $h$ est donc strictement supérieur à $2p-2$. Or on a $p > \frac{n+2}{2}$, il en résulte $2p-2 > n$, ce qui est contradictoire, car l'indice de nilpotence doit être inférieur à la dimension.
On conclut

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{si } A \text{ est une matrice carré d'ordre } n \text{ nilpotente d'indice } p \text{ avec } p > \frac{n+2}{2}, \text{ l'équation } M^2 = A \\ \text{n'a pas de solution.}\end{array}}$$

**Partie IV : Matrices de rang 1**

12. Supposons que $\mathrm{Im}\, A \cap \mathrm{Ker}\, A \neq \{0_{\mathbb{C}^n}\}$ et qu'il existe une matrice $M$ tel que $M^2 = A$. On notera $h$ l'endomorphisme canonique associé à $M$. On a donc $f = h^2$.
    (a) On a $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Im}\, f$. Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f$ est au moins de dimension 1 par hypothèse et $\mathrm{Im}\, f$ est de dimension 1, on conclut donc à l'égalité des dimensions. L'inclusion permet donc de conclure que $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f$. On conclut que

    $$\boxed{\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f.}$$

    (b) Soit $y \in \mathrm{Im}\, f$, il existe donc $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Comme $h^2 = f$, on a donc

    $$h(y) = h \circ f(x) = h \circ h \circ h(x) = f(h(x)) \in \mathrm{Im}\, f.$$

    On conclut

    $$\boxed{h(\mathrm{Im}\, f) \subset \mathrm{Im}\, f.}$$

    (c) Grâce à la question précédente, on a bien $h_{|\mathrm{Im}\, f} \in \mathrm{L}(\mathrm{Im}\, f)$. De plus, $h^2_{|\mathrm{Im}\, f} = f_{|\mathrm{Im}\, f} \neq 0_{\mathrm{L}(\mathrm{Im}\, f)}$, d'où $h$ n'est pas nilpotente d'ordre 2. Mais comme $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$, on a $f^2 = 0_{\mathrm{L}(E)}$, donc $h^4_{|\mathrm{Im}\, f} = f^2_{\mathrm{Im}\, f} = 0_{\mathrm{L}(\mathrm{Im}\, f)}$. L'endomorphisme $h$ est donc nilpotent d'ordre strictement supérieur à 2 et on conclut

    $$\boxed{h \text{ restreint à } \mathrm{Im}\, f \text{ est un endomorphisme de } \mathrm{Im}\, f \text{ nilpotent d'indice supérieur ou égale à 3.}}$$

    (d) Il y a contradiction car l'indice de nilpotence ne peut pas être supérieur à la dimension, or $\mathrm{Im}\, f$ est de dimension 1, donc l'endomorphisme $h$ n'existe pas, donc $M$ non plus.

13. On suppose maintenant $\mathrm{Im}\, A \cap \mathrm{Ker}\, A = \{0_{\mathbb{C}^n}\}$
    (a) $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ sont 2 sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$ en somme directe, grâce à l'hypothèse.
    Le théorème du rang nous donne $\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathbb{C}^n$.
    Par l'inclusion $\mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f \subset \mathbb{C}^n$ et l'égalité des dimensions $\dim \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f = \dim \mathbb{C}^n$, on conclut donc

    $$\boxed{\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f.}$$

    (b) Soit $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ adaptée à la somme $\mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$.
    Comme $\dim \mathrm{Im}\, f = 1$, on a donc $(e_1)$ base de $\mathrm{Im}\, f$ et $(e_2, e_3, \cdots, e_n)$ base de $\mathrm{Ker}\, f$.
    La matrice de $f$ dans cette base est donc de la forme

$$\boxed{\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}},$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

(c) Comme on est dans $\mathbb{C}$, il existe $\alpha$ tel que $\beta^2 = \alpha$. On définit $h$ par sa matrice dans la base $\mathcal{B}'$ construite à la question précédente par

$$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'} h = \begin{pmatrix} \beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $B^2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'} f$, l'application $h$, ainsi définie, convient.

14. Si $\mathrm{rg}\, A = 1$ et $\mathrm{Ker}\, A \cap \mathrm{Im}\, A \neq (0_{\mathbb{C}^n})$, on montré qu'il n'y avait pas de solution.
Si $\mathrm{rg}\, A = 1$ et $\mathrm{Ker}\, A \cap \mathrm{Im}\, A = (0_{\mathbb{C}^n})$ et si $f$ est l'endomorphisme associé à $A$, grâce à la question précédente, il existe un endomorphisme $h$ tel que $h^2 = f$ et la matrice $M$ associée canoniquement à $h$ vérifie bien $M^2 = A$.