Devoir surveillé 8

Consignes :

- Calculatrice interdite.
- Ne mélanger pas les exercices, une nouvelle copie pour chaque exercice.
- Numéroter chaque copie et mettre son nom sur chaque feuille.
- Encadrer les résultats.
- Les phrases d'explications courtes et claires avant tout calcul peut permettre de gagner des points.
- Les copies dont la propreté et la présentation laissent à désirer seront sanctionnées (Les ratures et les plaques de blanc correcteur sont à bannir).

Exercice 1.

On considère $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriels des suites réelles et les ensembles F et F_h définis par

$$F = \left\{(u_n)\,;\,(u_n) \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{3n+6}{n+3}u_{n+1} - \frac{2n+2}{n+3}u_n + n\right\}.$$

$$F_h = \left\{(u_n)\,;\,(u_n) \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{3n+6}{n+3}u_{n+1} - \frac{2n+2}{n+3}u_n\right\}.$$

Etude de F_h :

1. Justifier que F_h est un sous-espace vectoriel de E.
2. On considère l'application φ de F_h dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi((u_n)) = (u_0, u_1)$. Justifier de manière précise que c'est un isomorphisme.
3. Montrer que F_h est un espace vectoriel de dimension finie et déterminer sa dimension.
4. Soit (u_n) une suite de F_h, on définit la suite (v_n) par $v_n = (n+1)u_n$.
   (a) Montrer que (v_n) vérifie une suite récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
   (b) Expliciter une base de F dont les vecteurs sont de la forme $(u_n) = (f(n))$, où f est une fonction.

Un opérateur sur les polynômes :

On considère l'application ψ définie de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ par

$$\psi(P) = (X+3)P(X+2) - (3X+6)P(X+1) + (2X+2)P(X).$$

5. Soit $i \in [\![0, p]\!]$, déterminer le degré de $\psi(X^i)$.
6. Justifier que la restriction de ψ à $\mathbb{R}_p[X]$ définit un automorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$.
7. Déterminer l'antécédent de $X(X+3)$ par ψ que l'on notera $\tilde{Q}$.

Explicitation de F :

8. Donner une forme explicite en fonction de n des éléments de F. (On pourra utiliser $\tilde{Q}$ et un principe de superposition.)

Exercice 2.

Dans ce problème, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et on note $\mathrm{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

On considère f un endomorphisme de E vérifiant

$$f^2 = \frac{1}{2}\left(f + \mathrm{Id}_E\right).$$

(On rappelle que $f^2 = f \circ f$ et que Id_E est l'application de E dans $E : x \mapsto x$.)

1. Si $f = \alpha \mathrm{Id}_E$, quelle(s) valeur(s) peut prendre α ?
2. On revient au cas général
   (a) Montrer que f est un isomorphisme et exprimer sa réciproque comme une combinaison linéaire de f et Id_E.
   (b) Montrer que $E = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)$.
   (c) Calculer $(f - \mathrm{Id}_E) \circ (f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)$ et montrer que $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}\,(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)$.
   (d) De même montrer que $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}\,(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)$.
3. On suppose maintenant f et Id_E linéairement indépendant.
   (a) Exprimer f^3 et f^4 en fonction de f et Id_E.
   (b) Montrer qu'il existe un unique couple de suites réelles $((a_n), (b_n))$ tel que

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^n = a_n + b_n \mathrm{Id}_E,$$

   on donnera deux relations entre a_{n+1}, b_{n+1}, a_n et b_n, ainsi que les valeurs de a_0, b_0, a_1 et b_1.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$.
   (d) Exprimer a_n en fonction de n puis b_n en fonction de n.
   (e) Justifier que les suites (a_n) et (b_n) convergent des limtes que l'on précisera.
4. Soit $p = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E$, montrer que p est un projecteur. On précisera les sous-espaces caractéristiques de p.

Exercice 3. $\star$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit le polynôme

$$P_n(X) = X(X-1)\dots(X-n)$$

1. Montrer que le polynôme P_n' possède une unique racine dans l'intervalle $]0,1[$. Celle-ci sera noté x_n.
2. Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.
3. Former la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$F = \frac{P_n'}{P_n}$$

4. En déduire un équivalent de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$. (On pourra admettre que $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.)