Devoir surveillé 8

Exercice 1.

On considère $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriels des suites réelles et les ensembles F et F_h définis par

$$F = \left\{(u_n)\,;\,(u_n) \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{3n+6}{n+3}u_{n+1} - \frac{2n+2}{n+3}u_n + n\right\}.$$

$$F_h = \left\{(u_n)\,;\,(u_n) \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{3n+6}{n+3}u_{n+1} - \frac{2n+2}{n+3}u_n\right\}.$$

Etude de F_h :

1. On utilise la caractérisation des sous-espaces vectoriels.
   - Par définition, on a $F_h \subset E$.
   - La suite nulle est un élément de F_h, car on a
   $$\forall n, \quad 0 = \frac{3n+6}{n+3} \cdot 0 - \frac{2n+2}{n+3} \cdot 0$$
   - Soient (u_n) et (v_n) 2 éléments de E_h et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+2} = \frac{3n+6}{n+3}u_{n+1} - \frac{2n+2}{n+3}u_n \\ v_{n+2} = \frac{3n+6}{n+3}v_{n+1} - \frac{2n+2}{n+3}v_n \end{cases}$$
   En combinant les 2 lignes, on obtient
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + \lambda v_{n+2} = \frac{3n+6}{n+3}\left(u_{n+1} + \lambda v_{n+1}\right) - \frac{2n+2}{n+3}\left(u_n + \lambda v_n\right).$$
   Donc $(u_n + \lambda v_n)$ est un élément de F_h.

   On a donc F_h partie non vide de E stable par combinaisons linéaires, d'où
   $$\boxed{F_h \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$$
2. On a trois points à montrer :
   - **La linéarité de φ :** soit (u_n) et (u_n) deux éléments de F_h et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
   $$\varphi((u_n) + \lambda(v_n)) = (u_0 + \lambda v_0, u_1 + \lambda v_1) = (u_0, u_1) + \lambda(v_0, v_1) = \varphi((u_n)) + \lambda\varphi((v_n)).$$
   On a donc bien φ linéaire.
   - **Injectivité de φ :** On montre que $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_E\}$.
   $\boxed{\supset}$ Ok !
   $\boxed{\subset}$
   Soit $(u_n) \in \operatorname{Ker}\varphi$, on a donc $u_0 = u_1 = 0$ puis la formule de récurrence permet d'obtenir que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 0$.
   L'application linéaire φ est donc injective.
   - **Surjectivité de φ :**
   Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et $u_1 = b$ et
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{3n+6}{n+3}u_{n+1} - \frac{2n+2}{n+3}u_n$$
   est un vecteur de F_h qui est un antécédent de (a, b) par ψ.
   L'application linéaire φ est donc surjective.

On conclut que

$$\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme d'espace vectoriel.}}$$

3. On a démontré à la question précédente que F_h est isomorphe $\mathbb{R}^2$. Comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2, on conclut

$$\boxed{F_h \text{ est de dimension 2.}}$$

4. Soit (u_n) une suite de F_h, on définit la suite (v_n) par $v_n = (n+1)u_n$.
   (a) La relation de récurrence peut se mettre sous la forme

   $$(n+3)u_{n+2} = 3(n+2)u_{n+1} - 2(n+1)u_n.$$

   On a donc

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n}$$

   (b) On résout l'équation caractéristique $\alpha^2 = 3\alpha - 2$. On trouve 1 et 2 comme racines. Il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, tel que la suite (v_n) vérifie

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = A + B2^n,$$

   on trouve donc

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{A}{n+1} + \frac{B2^n}{n+1}.$$

   On a donc

   $$\boxed{\left(\left(\frac{1}{n+1}\right), \left(\frac{2^n}{n+1}\right)\right) \text{ base de } F_h.}$$

Un opérateur sur les polynômes :

Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$, on considère l'application ψ définie de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ par

$$\psi(P) = (X+3)P(X+2) - (3X+6)P(X+1) + (2X+2)P(X).$$

5. On calcule,

$$\psi(X^i) = (X+3)(X+2)^i - (3X+6)(X+1)^i + (2X+2)X^i.$$

Les règles usuelles sur le degré d'une somme de polynômes permet de majorer le degré par $i+1$. (Somme de 3 polynômes de degré $i+1$)
Le coefficient de degré $i+1$ des polynômes $(X+3)(X+2)^i$, $-(3X+6)(X+1)^i$ et $(2X+2)X^i$ est respectivement 1, -3 et 2, leur somme est donc nul.
En utilisant le binôme de Newton sur $(X+2)^i$ et $(X+1)^i$, Le coefficient de degré $i+1$ des polynômes $(X+3)(X+2)^i$, $-(3X+6)(X+1)^i$ est respectivement $3+2\binom{i}{1}$, $-6-3\binom{i}{1}$. Comme celui de $(2X+2)X^i$ est 2. Le coefficient de degré i de $(X+3)(X+2)^i - (3X+6)(X+1)^i + (2X+2)X^i$ est $3 + 2\binom{1}{i} - 6 - 3\binom{i}{1} + 2 = -1 - i \neq 0$.
On conclut que

$$\boxed{\deg \psi(X^i) = i.}$$

6. La spécialisation et la somme étant linéaire, φ est linéaire. On a montré que l'image de la base canonique de $\mathbb{R}_p[X]$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés de $\mathbb{R}_p[X]$, c'est encore une base de $\mathbb{R}_p[X]$. L'image de la base canonique de $\mathbb{R}_p[X]$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$ et on conclut

$$\boxed{\psi \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_p[X].}$$

7. Grâce à la question 5, on sait que l'on doit chercher l'antécédent de même degré. On calcule :

$$\psi(aX^2 + bX + c) = a\psi(X^2) + b\psi(X) + c\psi(1) = X(X+3) = X^2 + 3X.$$

Or

$$\begin{array}{rcl} \psi(1) & = & X+3-(3X+6)+(2X+2) = -1 \\ \psi(X) & = & (X+3)(X+2)-(3X+6)(X+1)+(2X+2)X = -2X \\ \psi(X^2) & = & (X+3)(X+2)^2-(3X+6)(X+1)^2+(2X+2)X^2 = -3X^2+X+6 \end{array}$$

On a donc

$$\psi(aX^2 + bX + c) = -3aX^2 + (a-2b)X + (6a-c).$$

On résout

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -3a & = & 1 \\ a-2b & = & 3 \\ 6a-c & = & 0 \end{array} \right.$$

On trouve donc $a = -\frac{1}{3}$, $c = -2$ et $b = -\frac{5}{3}$.
On conclut donc

$$\boxed{\text{l'antécédent par } \psi \text{ de } X(X+3) \text{ est } -\tfrac{1}{3}X^2 - \tfrac{5}{3}X - 2.}$$

Explicitation F :

8. On remarque que le polynôme $\tilde{Q}$ défini à la question précédente, vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+3)\tilde{Q}(n+2) - (3n+6)\tilde{Q}(n+1) + (2n+2)\tilde{Q}(n) = n(n+3),$$

soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \tilde{Q}(n+2) = \frac{3n+6}{n+3}\tilde{Q}(n+1) - \frac{2n+2}{n+3}\tilde{Q}(n) + n.$$

La suite (u_n) définie par $u_n = \tilde{Q}(n)$ est donc un élément de F.
Montrons que

$$\left\{(v_n + \tilde{Q}(n))\,;\,(v_n) \in F_h\right\} = F.$$

Si $(v_n) \in F_h$, on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = \frac{3n+6}{n+3}v_{n+1} - \frac{2n+2}{n+3}v_n$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} + \tilde{Q}(n+2) = \frac{3n+6}{n+3}\left(v_{n+1} + \tilde{Q}(n+1)\right) - \frac{2n+2}{n+3}\left(v_n + \tilde{Q}(n)\right) + n$$

Donc $(v_n + \tilde{Q}(n)) \in F$, on a donc

$$\left\{(v_n + \tilde{Q}(n))\,;\,(v_n) \in F_h\right\} \subset F.$$

Si $(w_n) \in F$, on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = \frac{3n+6}{n+3}w_{n+1} - \frac{2n+2}{n+3}w_n + n$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} - \tilde{Q}(n+2) = \frac{3n+6}{n+3}\left(w_{n+1} + \tilde{Q}(n+1)\right) - \frac{2n+2}{n+3}\left(w_n + \tilde{Q}(n)\right) + n$$

Donc $(w_n - \tilde{Q}(n)) \in F$, on a donc $(w_n) = (w_n - \tilde{Q}(n)) + (\tilde{Q}(n))$, soit

$$\left\{(v_n + \tilde{Q}(n))\,;\,(v_n) \in F_h\right\} \supset F.$$

On conclut

$$\boxed{F=\left\{\left(\frac{A}{n+1}+\frac{B\cdot 2^n}{n+1}-\frac{1}{3}n^2-\frac{5}{3}n-2\right)\ ;\ (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

Exercice 2.

1. Calculons $f^2-\frac{1}{2}(f+\mathrm{Id}_E)$ pour $f=\alpha\mathrm{Id}_E$. On a

$$f^2-\frac{1}{2}(f+\mathrm{Id}_E)=\left(\alpha^2-\frac{1}{2}(\alpha+1)\right)\mathrm{Id}_E.$$

Il est donc nécessaire et suffisant que $\alpha^2-\frac{1}{2}(\alpha+1)=0$, on trouve $\alpha=1$ ou $\alpha=-\frac{1}{2}$. Les seules homothéties vérifiant$f^2=\frac{1}{2}\left(f+\mathrm{Id}_E\right)$ sont

$$\boxed{\mathrm{Id}_E \text{ et } -\tfrac{1}{2}\mathrm{Id}_E.}$$

2. (a) On remarque que $2f^2-f=\mathrm{Id}_E$. On en déduit que

$$f\circ(2f-\mathrm{Id}_E)=(2f-\mathrm{Id}_E)\circ f=\mathrm{Id}_E.$$

On en déduit donc que

$$\boxed{f \text{ est un isomorphisme et } f^{-1}=2f-\mathrm{Id}_E.}$$

(b) On pourrait montrer dans premier temps la somme directe puis démontrer la décomposition dans un second. Ici, l'analyse-synthèse permet de démontrer directement l'existence et l'unité de la décomposition.
Soit $x\in E$.
Analyse :
Supposons $x=x_1+x_{-\frac{1}{2}}$, où $x_1\in\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$ et $x_{-\frac{1}{2}}\in\operatorname{Ker}(f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)$.
On a donc $f(x_1)=x_1$ et $f(x_{-\frac{1}{2}})=-\frac{1}{2}x_{-\frac{1}{2}}$. En appliquant f à x, on obtient

$$f(x)=f(x_1)+f(x_{-\frac{1}{2}})=x_1-\frac{1}{2}x_{-\frac{1}{2}}.$$

On résout donc le système $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & x_1+x_{-\frac{1}{2}} \\ f(x) & = & x_1-\frac{1}{2}x_{-\frac{1}{2}}.\end{array}\right.$
On obtient $x_{-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}(x-f(x))$ et $x_1=\frac{1}{3}\left(x+2f(x)\right)$.
Synthèse :
On a bien $x_{-\frac{1}{2}}+x_1=\frac{2}{3}(x-f(x))+\frac{1}{3}\left(x+2f(x)\right)=x$.
De plus comme $f^2(x)=\frac{1}{2}(f(x)+x)$, on a

$$\begin{aligned}(f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)(x_{-\frac{1}{2}})&=f\left(\frac{2}{3}(x-f(x))\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}(x-f(x))\right)\\ &=\frac{2}{3}\left(f(x)-f^2(x))+\frac{1}{2}(x-f(x))\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}f(x)-f^2(x)\right)=0_E\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f-\mathrm{Id}_E)(x_1)&=f\left(\frac{1}{3}(x+2f(x))\right)-\left(\frac{1}{3}(x+2f(x))\right)\\ &=\frac{1}{3}\left((f(x)+2f^2(x))-(x+2f(x))\right)=\frac{1}{3}\left(f^2(x)-f(x)-x\right)=0_E\end{aligned}$$

Il en résulte bien que $x_1\in\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$ et $x_{-\frac{1}{2}}\in\operatorname{Ker}(f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)$. Par existence et unicité de la décomposition obtenue, on conclut

$$\boxed{E = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(f + \tfrac{1}{2}\mathrm{Id}_E).}$$

(c) On développe
$$(f - \mathrm{Id}_E) \circ (f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E) = f^2 - \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)},$$
car $f^2 = \frac{1}{2}\,(f + \mathrm{Id}_E)\,.$

Montrons que $\mathrm{Im}\,(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$.

Soit $y \in \mathrm{Im}\,(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)$, donc il existe $x \in E$, tel que $(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)(x) = y$. On en déduit donc
$$(f - \mathrm{Id}_E)(y) = (f - \mathrm{Id}_E) \circ (f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)(x) = 0_{\mathrm{L}(E)}(x) = 0_E,$$
donc $y \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$.

On a donc bien $\mathrm{Im}\,(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$.

Démontrons l'égalité des dimensions.

On a grâce à la question précédente (somme directe),
$$\dim \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E) + \dim \mathrm{Ker}\,(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E) = \dim E.$$
En appliquant le théorème du rang à $(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)$, on a
$$\dim E = \dim \mathrm{Im}\,(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E) + \dim \mathrm{Ker}\,(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E).$$
En regroupant les deux résultats, on obtient bien $\dim \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E) = \dim \mathrm{Im}\,(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)$.

On a donc inclusion et égalité des dimensions, on conclut
$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}\,(f + \tfrac{1}{2}\mathrm{Id}_E).}$$

(d) Même méthode que la question précédente, car $(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E) = 0_{\mathrm{L}(E)}$. On montre $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}\,(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)$ et l'égalité des dimensions.
$$\boxed{\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}\,(f + \tfrac{1}{2}\mathrm{Id}_E).}$$

3. (a) Comme $f^2 = \frac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_E)$, on calcule
$$\begin{aligned} f^3 &= \frac{1}{2}(f^2 + f) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_E) + f) = \frac{3}{4}f + \frac{1}{4}\mathrm{Id}_E \\ f^4 &= \frac{3}{4}f^2 + \frac{1}{4}f = \frac{3}{4}f^2 + \frac{1}{4}f = \frac{3}{8}f + \frac{3}{8}\mathrm{Id}_E + \frac{1}{4}f = \frac{5}{8}f + \frac{3}{8}\mathrm{Id}_E \end{aligned}$$
On conclut
$$\boxed{f^3 = \tfrac{3}{4}f + \tfrac{1}{4}\mathrm{Id}_E \text{ et } f^4 = \tfrac{5}{8}f + \tfrac{3}{8}\mathrm{Id}_E.}$$

(b) Unicité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, si il existe a_n et b_n réels tel que
$$f^n = a_n f + b_n \mathrm{Id}_E$$
Par liberté de la famille (f, Id_E) (f et Id_E sont supposé linéairement indépendant), cette décomposition est unique.

Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, il existe a_n et b_n 2 réels tel que
$$f^n = a_n f + b_n \mathrm{Id}_E.$$

Initilisation :

Pour $n=0$, on a $f^0=\mathrm{Id}_E=0\cdot f+1\cdot\mathrm{Id}_E$. $a_0=0$ et $b_0=1$ conviennent.
Hérédité :
Supposons qu'au rang n, il existe $(a_n,b_n)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$f^n=a_nf+b_n\mathrm{Id}_E.$$

En composant par f, on a donc

$$f^{n+1}=a_nf^2+b_nf=a_n\frac{1}{2}(f+\mathrm{Id}_E)+b_nf=\left(\frac{a_n}{2}+b_n\right)f+\frac{1}{2}a_n\mathrm{Id}_E.$$

On conclut donc que $a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+b_n$ et $b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$ conviennent.
On conclut qu'il existe un couple de suites $((a_n),(b_n))$ tel que $\forall n\in\mathbb{N},\quad f^n=a_nf+b_n\mathrm{Id}_E$, défini par

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ll} a_0=0, & b_0=1 \\ \forall n\in\mathbb{N}, & \begin{array}{l} a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+b_n \\ b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n. \end{array}\end{array}\right.}$$

On calcule $a_1=1$ et $b_1=0$, cohérent car $f^1=1\cdot f+0\cdot\mathrm{Id}_E$.

(c) On a $\forall n\in\mathbb{N},\quad \begin{array}{l} a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+b_n \\ b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n. \end{array}$
Grâce à la première ligne, on a donc $b_{n+1}=a_{n+2}-\frac{a_{n+1}}{2}$. On substitue dans la deuxième et on trouve

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+2}-\frac{a_{n+1}}{2}=\frac{1}{2}a_n,$$

soit

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad 2a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0}$$

(d) On reconnait une récurrence d'ordre 2 d'équation caractéristique $2x^2-x-1=0$, ses racines sont 1 et $-\frac{1}{2}$. On en déduit qu'il existe A et B tel que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=A+B\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Comme $a_0=0$ et $a_1=1$, on en déduit que $A+B=0$ et $A-\frac{1}{2}B=1$, soit $A=\frac{2}{3}$ et $B=-\frac{2}{3}$.
On a donc

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=\tfrac{2}{3}-\tfrac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.}$$

Puis comme $b_n=a_{n+1}-\frac{a_n}{2}$, on a donc

$$b_n=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

On conclut

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad b_n=\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.}$$

(e) Comme $-\frac{1}{2}\in]-1,1[$, on a $\left(-\frac{1}{2}\right)^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et on conclut

$$\boxed{a_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\tfrac{2}{3}\text{ et }b_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\tfrac{1}{3}.}$$

4. L'analyse-synthèse de la question 2.(b) nous donne que x se décompose sur la somme directe $E = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)$, en

$$x = \underbrace{\frac{1}{3}(2f(x) + x)}_{\in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)} + \underbrace{\frac{2}{3}(-f(x) + 2x)}_{\in \operatorname{Ker}(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)}.$$

On en déduit que $\frac{1}{3}(2f(x)+x)$ est le projeté de x sur $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)$. On conclut que

$$\boxed{p \text{ est le projecteur sur } \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \text{ parallèlement à } \operatorname{Ker}(f + \tfrac{1}{2}\mathrm{Id}_E).}$$