Devoir surveillé 6

Consignes :

- Calculatrice interdite.
- Ne mélanger pas les exercices, une nouvelle copie pour chaque exercice.
- Numéroter chaque copie et mettre son nom sur chaque feuille.
- Encadrer les résultats.
- Les phrases d'explications courtes et claires avant tout calcul peut permettre de gagner des points.
- Les copies dont la propreté et la présentation laissent à désirer seront sanctionnées (Les ratures et les plaques de blanc correcteur sont à bannir).

Exercice 1.

Partie A :

Soit l'équation différentielle

$$(1-x)^2y'(x) = (2-x)y(x). \quad (E)$$

1. Calculer une primitive A de la fonction a définie par $a(x) = \frac{2-x}{(1-x)^2}$, on précisera les domaines de validité.
2. Résoudre (E) sur $I_1 =]-\infty, 1[$.

Partie B :

On définit sur $I_1 =]-\infty, 1[$, la fonction f par

$$f(x) = \frac{1}{1-x}e^{\frac{1}{1-x}}.$$

3. Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre 3. On précisera la tangente à la courbe de f en 0 et la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de 0.
4. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$ qu'il existe un unique polynôme P_n tel que pour tout $x \in I_1$
$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}}.$$
On déterminera une relation de récurrence donnant P_{n+1} en fonction de P_n, P_n' et X.
5. Déterminer P_0, P_1, P_2 et P_3.
6. En dérivant n fois les 2 membres de l'équation (E), montrer que
$$P_{n+1}(X) = \left[(2n+1)X + X^2\right]P_n(X) - n^2X^2P_{n-1}(X).$$

7. Déterminer en fonction de n, le degré de P_n, son coefficient dominant, ainsi qu'un équivalent en $t = 0$ de $P_n(t)$.
8. On définit la suite (a_n) par $a_n = P_n(1)$.
   (a) Exprimer une relation donnant a_{n+1} en fonction de a_n, a_{n-1} et n.
   (b) Donner sans nouveaux calculs, les valeurs de a_0, a_1, a_2, a_3.
   (c) En déduire la valeur de a_4 et un développement limité de f en 0 à l'ordre 4.

Exercice 2. Soit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère l'application φ

$$\varphi \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ f & \longmapsto & (f(0), f(1), f(2)) \end{array}$$

1. Démontrer que φ est une application linéaire.
2. Donner un vecteur non trivial du noyau de φ (c'est-à-dire différent de la fonction nulle).
3. Montrer que les fonctions polynomiales de degré au plus 2 forment un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\operatorname{Ker} \varphi$ dans E.

Exercice 3.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , f et g deux endomorphismes de E.

Les deux questions sont indépendantes :

1. Montrer qu'il y a équivalence entre
   (i) $f \circ g = 0_{L(E)}$
   (ii) $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$.
2. On suppose $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.
   (a) Montrer que $\operatorname{Ker} g \circ f = \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} g \circ f = \operatorname{Im} g$.
   (b) Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} g$ sont supplémentaires.

Exercice 4.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme $P_n = \displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} \binom{n}{2k+1} X^{2k+1}$.

1. Montrer que si α est une racine de P_n si et seulement si $(1+\alpha)^n = (1-\alpha)^n$.
   (*On pourra introduire le polynôme* $Q_n = \displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} \binom{n}{2k} X^{2k}$)
2. Montrer que si α est une racine de P_n, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = i \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
3. Factoriser P_n dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$. (*Attention à la parité !*)
4. Montrer qu'il existe un unique polynôme H_n, tel que
$$X H_n(X^2) = P_n(X).$$
5. Exprimer H_n sous forme développée puis sous forme factorisée.
6. Exprimer sous forme réduite
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$
7. En déduire la forme réduite de
$$C_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}.$$