Devoir surveillé 6

Consignes :

- Calculatrice interdite.
- Ne mélanger pas les exercices, une nouvelle copie pour chaque exercice.
- Numéroter chaque copie et mettre son nom sur chaque feuille.
- Encadrer les résultats.
- Les phrases d'explications courtes et claires avant tout calcul peut permettre de gagner des points.
- Les copies dont la propreté et la présentation laissent à désirer seront sanctionnées (Les ratures et les plaques de blanc correcteur sont à bannir).

Exercice 1.

On considère l'ensemble de matrices

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a+2b & -4b \\ b & a-2b \end{pmatrix} \quad ; \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

On notera $M(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & -4b \\ b & a-2b \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est non vide et stable par combinaisons linéaires.
2. Calculer $M(0,b)^2$.
3. Montrer A est stable par produit matriciel.
4. Calculer $M(a,b)^n$ en fonction de a, b et n. On montrera que $M(a,b)^n = M(a^n, na^{n-1}b)$.
5. On définit les suites de matrices (U_n) et (V_n) par

$$U_n = M(a,b)^n \qquad \text{et} \qquad V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k}{k}.$$

On dit qu'une suite de matrices (M_n) de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ converge, si chacun des coefficients de cette matrice converge, c'est-à-dire pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, la suite (v_n) définie par $v_n = (M_n)_{ij}$ converge.

(a) Montrer que $|a| < 1$ est une condition nécessaire et suffisante pour que la suite (U_n) converge vers la matrice nulle. On supposera, pour la suite, que cette condition est remplie.

(b) Soit $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$, exprimer sous forme réduite $S_n(x)$.

(c) Soit $H_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1}$, justifier que

$$\forall x \in]-\infty, 1[, \quad H_n(x) = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} \mathrm{d}t.$$

(d) Justifier que si $x \in]-1,1[$, alors $H_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(1-x)$.

(e) Exprimer sous forme réduite V_n en utilisant S_n et H_n.

(f) Justifier que sous l'hypothèse fixée à la question 5(a), la suite (V_n) converge vers une limite A que l'on exprimera en fonction de a et b.

Exercice 2. On définit la matrice $M = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ par

1. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) λ la matrice $A(\lambda) = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.
2. Résoudre
$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2x+2y & = & -x \\ x-3y & = & -y \end{array} \right.$$
on écrira l'ensemble des solutions sous la forme $\mathbb{R}\overrightarrow{u}_1$ où $\overrightarrow{u}_1$ est un vecteur à coefficients entiers positifs premier entre eux.
3. Résoudre
$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2x+2y & = & -4x \\ x-3y & = & -4y \end{array} \right.$$
on écrira l'ensemble des solutions sous la forme $\mathbb{R}\overrightarrow{u}_2$ où $\overrightarrow{u}_2$ est un vecteur dont le premier coefficient est un 1.
4. On note P la matrice obtenue en accolant les 2 vecteurs $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$, calculer P^{-1}.
5. Calculer $P^{-1}MP$. *(Si la matrice obtenue n'est pas diagonale, revoir vos calculs.)*
6. Soit le système différentielle (E)
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'' & = & -2x+2y \\ y'' & = & x-3y \end{array} \right.$$
Pour (x, y) solution, on définit les fonctions u et v par $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
   (a) Grâce au calcul précédent, (x, y) est solution de (E) est équivalent à
   $$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$
   Expliciter le système différentiel vérifié par u et v.
   (b) Résoudre (E) avec des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Problème :

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on définit la suite $(u_n(x))$ par

$$\begin{cases} u_0(x) = x \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}(x) = \frac{(u_n(x))^2}{n+1}. \end{cases}$$

L'expression $u_n(x)$ définit donc une fonction u_n de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

On se propose d'étudier le comportement de la suite $(u_n(x))$.

Etude de u_n et détermination de la limite de la suite $(u_n(x))$ (si elle existe).

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad u_n(x) \geq 0$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est strictement croissante.
3. Dresser le tableau de variation de u_n. On précisera les limites.
4. Justifier que u_n définit une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans un intervalle à préciser.
5. Déterminer le domaine de dérivabilité de la réciproque de la fonction u_n.
6. Soit x fixé, on suppose que la suite $(u_n(x))$ admet une limite finie ℓ quand n tend vers $+\infty$. Préciser la valeur de ℓ.

Bassins d'attraction :

On note

$$E_0 = \left\{x\,;\, x \in \mathbb{R}^+ \text{ et } u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right\} \quad E_\infty = \left\{x\,;\, x \in \mathbb{R}^+ \text{ et } u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\right\}$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $u_N(x) \leq N + 1$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n(x))$ est décroissante à partir du rang N.
   (b) Justifier que $x \in E_0$.
   (c) Justifier que $1 \in E_0$.
8. Soit $x \in \mathbb{R}^+$, tel que la suite $(u_n(x))$ ne converge pas vers 0.
   (a) Montrer que la suite $(u_n(x))$ diverge vers $+\infty$. (Penser à utiliser la question 7)
   (b) En déduire que $\mathbb{R}^+ = E_0 \cup E_\infty$.
   (c) Justifier que $2 \in E_\infty$. (On pourra regarder la propriété $u_n(x) \geq n + 2$)
   (d) Justifier que 2 majore E_0.
9. Justifier que E_0 admet une borne sup noté δ.
10. Justifier que E_0 et E_∞ sont des intervalles. On précisera les différentes possibilités pour E_0 et E_∞ en utilisant δ.
11. Montrer $x_0 \in E_0$, si et seulement si il existe N tel que $u_N(x_0) < 1$.
12. Soit $x_0 \in E_0$, en considérant le rang N tel que $u_N(x_0) < 1$ et la fonction u_N, montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $x_0 + \epsilon \in E_0$.
13. En déduire que $\delta \notin E_0$ et expliciter E_0 et E_∞.