Devoir surveillé 5 correction

Exercice 1.

1. Calculons le taux accroissement en 0, on a

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\cos(\sqrt{x})-1}{x}.$$

Les équivalents usuels nous donnent

$$\cos(u)-1 \underset{u\to 0}{\sim} -\frac{u^2}{2}.$$

On a donc

$$\frac{\cos(\sqrt{x})-1}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{-\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2}}{x} = -\frac{1}{2}.$$

On conclut donc

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = -\tfrac{1}{2}.}$$

2. Considérons la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(x) = \cos(\sqrt{x}) - x$. On a $x \mapsto \sqrt{x}$ croissante strictement sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ et cos est décroissante strictement sur $[0,1]$. On conclut donc par composition que g est strictement décroissante sur $[0,1]$ à valuer dans $[0,1]$ et de plus continue par les règles usuelles. Or $g(0) = 1$ et $g(1) = \cos(1) - 1 \leq 0$, on peut donc applique le théorème de la bijection et on conclut

$$\boxed{f(x) - x = 0 \text{ admet une unique solution sur } [0,1] \text{ que l'on notera } \alpha.}$$

3. Considérons la fonction h définie sur $[0,1]$ par $h(x) = \sin(x) - x$. On calcule $h'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0$. La fonction est décroissante sur $[0,1]$ et on a donc

$$\forall x \in [0,1], \quad h(x) \leq h(0) = 0.$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [0,1], \quad \sin(x) \leq x.}$$

4. On calcule

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x}).$$

On déduit en utilisant la question précédente, pour $\sqrt{x} \in]0,1]$

$$\left|f'(x)\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}.$$

La fonction f est $\frac{1}{2}$-lipchitzienne sur $[0,1]$ (la dérivée est aussi bornée en valeur absolue par $\frac{1}{2}$ en 0 et de toute façon, les théorèmes liant le taux d'accroissement et la dérivée nécessite seulement la dérivabilité sur l'ouvert). On conclut donc

$$\boxed{\forall x,y \in [0,1], \quad |f(x) - f(y)| \leq \tfrac{1}{2}\,|x-y|\,.}$$

5. Montrons par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}\alpha.$$

Initialisation :
Pour $n = 0$, on a bien $|u_0 - \alpha| = \alpha \leq \frac{1}{2^0}\alpha$.
Hérédité :
Supposons qu'à un rang n fixé, on a $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}\alpha$.
Comme α est un point fixe de f et grâce à la question précédente, on a
$$|u_{n+1} - \alpha| \leq |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|,$$
en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a
$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n}\alpha = \frac{1}{2^{n+1}}\alpha.$$
Comme la propriété est initialisé et héréditaire, on conclut donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}\alpha.$$
Comme $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, on a $\frac{1}{2^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et par le théorème des gendarmes, on peut donc conclure
$$\boxed{\text{La suite converge vers } \alpha \text{ le point fixe de } f.}$$

Exercice 2.

On définit la fonction th par $\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$.

1. La fonction ch se s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ et étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ et la fonction sh étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, les règles de composition usuelles permettent de conclut que
$$\boxed{\text{la fonction th est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

2. On calcule
$$\begin{aligned}(\operatorname{th})'(x) &= \frac{\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} \\ &= 1 - \operatorname{th}^2(x).\end{aligned}$$
On en déduit que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (\operatorname{th})^{n+1}(x) = -\left(\operatorname{th}^2(x)\right)^{(n)}.$$
On peut donc utiliser la formule de Leibniz, car la fonction th est de classe $\mathcal{C}^\infty$,, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (\operatorname{th})^{n+1}(x) = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\operatorname{th})^{(k)}(x)(\operatorname{th})^{(n-k)}(x).$$
En divisant par $(n+1)!$ et en évaluant en 0, on obtient
$$a_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\operatorname{th})^{(k)}(0)(\operatorname{th})^{(n-k)}(0).$$
Comme $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, il en résulte
$$a_{n+1} = -\frac{n!}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n} \frac{(\operatorname{th})^{(k)}(0)}{k!} \cdot \frac{(\operatorname{th})^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}.$$
On conclut donc bien que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.}$$

3. Comme la fonction th est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que c'est une fonction impaire, toutes ses fonctions dérivées d'ordre paires sont définies sur $\mathbb{R}$ et impaires. (On peut aussi utiliser l'imparité et le fait que la suite (a_n) est la suite des coefficients du développement limité de th en 0) On a donc $(\text{th}\,)^{(2n)}(0) = 0$. On conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n} = 0.}$$

4. On calcule $a_1 = 1$ directement en utilisant la dérivée, puis la formule obtenue donne

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{1}{3}(a_1 \cdot a_1) = -\frac{1}{3} \\ a_5 &= -\frac{1}{5}(a_1 a_3 + a_3 a 1) = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

On conclut

$$\boxed{\text{th}\,(x) = x - \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5).}$$

Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction th.

Exercice 3.

1. Soit f une solution du problème.
On remarque déjà que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) f\left(\frac{x}{2}\right). \qquad (\star)$$

Montrons par récurrence sur n que

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

Initialisation :
Pour $n = 0$, on a bien $f(x) = f(x) \cdot 1$. Le produit est sur un ensemble vide donc vaut 1.
Hérédité :
Supposons qu'à un rang n fixé, on a

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

Or, grâce à $(\star)$, on a $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$, d'où

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

La propriété est donc héréditaire.
On conclut

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\qquad f(x)=f\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right).}$$

2. En utilisant la question précédente, on a alors

$$\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)f(x)=\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)f\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

Puis comme $\sin(a)\cos(a)=\frac{1}{2}\sin(2a)$, on a

$$\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\prod_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

Par récurrence (rédaction similaire à la question précédente), on a

$$\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)f(x)=\frac{1}{2^n}\sin(x).$$

On conclut donc que si $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\neq 0$

$$\boxed{f(x)=\frac{\sin(x)}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}f\left(\frac{x}{2^n}\right).}$$

3. Soit $x\neq 0$, on a donc pour n suffisamment grand $0<\left|\frac{x}{2^n}\right|<\pi$, donc $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\neq 0$.

Puis comme $\frac{x}{2^n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, par continuité de f en 0, on a $f\left(\frac{x}{2^n}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}f(0)=2$ et par les équivalents usuels, on a

$$\frac{\sin(x)}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\sin(x)}{2^n\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin(x)}{x}.$$

On en déduit que $f(x)=2\dfrac{\sin(x)}{x}$ est une expression de la seule solution potentielle pour $x\neq 0$, on la prolonge par continuité en 0 par 2 par les limites usuelles.
En synthèse, on vérifie que si $x\neq 0$ (le cas $x=0$ donne $f(0)=1\cdot f(0)$), $f(2x)=2\frac{\sin(2x)}{2x}=2\frac{2\sin(x)\cos(x)}{2x}=\cos(x)\,2\frac{\sin(x)}{x}$. La fonction obtenue en analyse convient et conclut que

$$\boxed{\text{la seule solution du problème est la fonction } f \text{ définie par } f(x)=\begin{cases}2\frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 2 & \text{si } x=0.\end{cases}}$$

Exercice 4.

1. En prenant, $x=y=0$, on obtient

$$f(0+0)=\frac{2f(0)}{1+f(0)^2},$$

soit

$$(f(0))^3-f(0)=0.$$

On obtient trois solutions -1, 0 et 1.

$$\boxed{A=(-1;0;1).}$$

2. Supposons $f(0)=\epsilon$ avec $\epsilon \in \{-1,1\}$, on a

$$f(x+0)=\frac{f(x)+f(0)}{1+f(x)f(0)}=\frac{f(x)+\epsilon}{1+\epsilon f(x)}=\epsilon\frac{f(x)+\epsilon}{\epsilon+\epsilon^2 f(x)}=\epsilon. \quad (\text{car } \epsilon^2=1)$$

   On vérifie que $x\mapsto\epsilon$ est solution.

3. (a) En prenant $y=-x$, dans l'équation fonctionnelle, on obtient

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad 0=f(0)=\frac{f(x)+f(-x)}{1+f(x)f(-x)}.$$

   Il en résulte que $f(x)+f(-x)=0$. On conclut donc que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est impaire.}}$$

   (b) i. En prenant, $x=y=\frac{x_0}{2}$, dans l'équation fonctionnelle, on obtient

$$1=f(x_0)=\frac{2f\left(\frac{x_0}{2}\right)}{1+f\left(\frac{x_0}{2}\right)^2},$$

   d'où

$$1+f\left(\frac{x_0}{2}\right)^2-2f\left(\frac{x_0}{2}\right)=0.$$

   On a $\left(f\left(\frac{x_0}{2}\right)-1\right)^2=0$ et on conclut

$$\boxed{f\left(\frac{x_0}{2}\right)=1.}$$

   On généralise par récurrence et on obtient

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)=1.}$$

   ii. On a $\frac{x_0}{2^n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Comme $f$est continue, on a donc

$$1=f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}f(0)=0.$$

   Ce qui est contradictoire, on conclut

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)\neq 1.}$$

   (c) Soit la fonction g définit par $g(x)=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}$.

   i. Le seule problème de définition peut venir de l'existence d'un x_0, tel que $f(x_0)=-1$. Si un tel x_0 existait, alors par imparité, on aurait $f(-x_0)=1$. Or $f(x)=1$ n'a pas de solution, donc un tel x_0 n'existe pas. (Non demandé dans la question, on peut justifier que $f(\mathbb{R})\subset]-1,1[$).

   On conclut donc, par les règles usuelles de composition, que

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}.}$$

   ii. On calcule

$$\begin{aligned}
g(x+y)-g(x)g(y) &= \frac{-f(x+y)+1}{f(x+y)+1}-\frac{-f(x)+1}{f(x)+1}\cdot\frac{-f(y)+1}{f(y)+1}\\
&= \frac{-\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)})+1}{\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}+1}-\frac{-f(x)+1}{f(x)+1}\cdot\frac{-f(y)+1}{f(y)+1}\\
&= \frac{-f(x)-f(y)+1+f(x)f(y)}{f(x)+f(y)+1+f(x)f(y)}-\frac{-f(x)-f(y)+1+f(x)f(y)}{f(x)+f(y)+1+f(x)f(y)}\\
&= 0
\end{aligned}$$

   On conclut donc

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad g(x+y) = g(x)g(x).}$$

iii. On remarque que $g(0) = 1$ et que g est continue sur $\mathbb{R}$. Grâce à l'équation fonctionnelle, on montre par récurrence (le rédiger !) que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(nx) = f(x)^n.(\star)$$

De plus, g ne peux pas s'annuler car $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x)g(-x) = g(0) = 1$. Par continuité sur l'intervalle $\mathbb{R}$, on a donc $g > 0$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$, on a, en utilisant $(\star)$.

$$\begin{aligned} g(1) = g\left(q\frac{1}{q}\right) &= \left(g\left(\frac{1}{q}\right)\right)^q \\ g\left(\frac{p}{q}\right) &= \left(g\left(\frac{1}{q}\right)\right)^p \end{aligned}$$

Comme tout est positif, on passer à la puissance $\frac{1}{q}$, on en déduit $g\left(\frac{p}{q}\right) = (g\,(1))^{\frac{p}{q}}$.
Si $x \in \mathbb{Q}^-$, alors $-x \in \mathbb{Q}^+$ et comme $f(x)f(-x) = f(0)$, on en déduit

$$f(x) = \frac{1}{f(-x)} = \frac{1}{f(1)^{-x}} = (f(1))^x.$$

On a donc que $\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) = (f(1))^x$. Puis pour $\alpha \in \mathbb{R}$, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite (u_n) de rationnels tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$.
On a par continuité de la puissance $f(u_n) = (f(1))^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(1)^\alpha$ et par continuité de f $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\alpha)$. On en déduit que $f(\alpha) = (f(1))^\alpha$. On vérifie qu'une telle fonction vérifie l'équation fonctionnelle et on conclut

$$\boxed{\text{Les fonctions solutions } g \text{ sont de la forme } x \mapsto A^x \text{ avec un } A \text{ réel strictement positif fixé.}}$$

iv. Comme les fonctions g solutions de la question précédente ont expression $g(x) = \frac{-f(x)+1}{f(x)+1}$ avec f solution du problème initiale avec $f(0) = 0$. On en dédit que les solutions du problème initial est une expression de la forme $f(x) = \frac{-g(x)+1}{g(x)+1}$ et on conclut

$$\boxed{\text{les solutions du problème initial tel que } f(0) = 0 \text{ sont de la forme } x \mapsto \frac{-A^x+1}{A^x+1}, \text{ où } A \in \mathbb{R}^{+*}.}$$

4. On conclut que l'ensemble des solutions du problème initial est

$$\boxed{\mathcal{S} = \{x \mapsto 1\} \cup \{x \mapsto -1\} \cup \left\{x \mapsto \frac{-A^x+1}{A^x+1} \quad ; \quad A \in \mathbb{R}^{+*}\right\}.}$$

Exercice 5.

Pour $n \in \mathbb{N}$, On considère l'équation

$$e^x + nx^2 - 3 = 0.$$

1. La fonction f_n définie par $f_n(x) = e^x + nx^2 - 3$ est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de fonctions continues strictement croissantes. De plus, $f(0) = -2 < 0$ et $f(\ln 3) = n(\ln 3)^2 \geq 0$, par le théorème de la bijection, il existe donc une unique solution et $x_n > 0$.
2. On a $f_n(x_n) = 0 = e^{x_n} + nx_n^2 - 3$, on en déduit que $f_{n+1}(x_n) = e^{x_n} + (n+1)x_n^2 - 3 = e^{x_n} + nx_n^2 - 3 + x_n^2 = x_n^2 \geq 0$; Comme f_{n+1} est croissante et que $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, on en déduit $x_{n+1} \leq x_n$. La suite (x_n) est donc décroissante et minoré par 0. On conclut que

$$\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ converge vers une limite } \ell \geq 0.}$$

3. Supposons $\ell > 0$, on a alors $\mathrm{e}^{x_n} - 3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\ell} - 3$ et $nx_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, or $\mathrm{e}^{x_n} + nx_n^2 - 3 = 0$ contradictoire.
   On conclut que

$$\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ converge vers } 0.}$$

4. On a

$$nx_n^2 = 3 - \mathrm{e}^{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2.$$

   On a donc $nx_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2$, soit $x_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$. Comme $x_n \geq 0$, on conclut

$$\boxed{x_n \underset{n}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}.}$$

5. On a

$$x_n = \sqrt{\frac{2}{n}} + \epsilon_n \qquad \text{avec } \epsilon_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right).$$

   On injecte dans l'équation et on obtient

$$\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{2}{n}} + \epsilon_n} + n\left(\sqrt{\frac{2}{n}} + \epsilon_n\right)^2 - 3 = 0.$$

   On développe et on trouve

$$\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{2}{n}} + \epsilon_n} - 1 + 2\sqrt{2n}\epsilon_n + n\epsilon_n^2 = 0.$$

   On a donc

$$2\sqrt{2n}\epsilon_n + n\epsilon_n^2 = -\left(\mathrm{e}^{x_n} - 1\right).$$

   Comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a donc

$$\mathrm{e}^{x_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

   Puis

$$2\sqrt{2n}\epsilon_n + n\epsilon_n^2 = \sqrt{2n}\epsilon_n\left(2 + \sqrt{\frac{n}{2}}\epsilon_n\right),$$

   or $\epsilon_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sqrt{\dfrac{2}{n}}\right)$, on a $\sqrt{\frac{n}{2}}\epsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc

$$2\sqrt{2n}\epsilon_n + n\epsilon_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{2n}\epsilon_n.$$

   On a donc

$$2\sqrt{2n}\epsilon_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{2n}\epsilon_n + n\epsilon_n^2 = -\left(\mathrm{e}^{x_n} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\sqrt{\frac{2}{n}}.$$

   Il en résulte

$$\boxed{x_n - \sqrt{\frac{2}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}.}$$