Devoir surveillé 4

Consignes :

- Calculatrice interdite.
- Ne mélanger pas les exercices, une nouvelle copie pour chaque exercice.
- Numéroter chaque copie et mettre son nom sur chaque feuille.
- Encadrer les résultats.
- Les phrases d'explications courtes et claires avant tout calcul peut permettre de gagner des points.
- Les copies dont la propreté et la présentation laissent à désirer seront sanctionnées (Les ratures et les plaques de blanc correcteur sont à bannir).

Exercice 1.

Donner des équivalents simples des expressions suivantes aux points indiqués :

- $f_1(x) = \cos(x) + \mathrm{ch}\,(x) - 2$ en $x = 0$.
- $f_2(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}\,(x)} - \frac{1}{\sin(x)}$ en $x = 0$.
- $f_3(x) = \ln(\mathrm{sh}\,(x) - x)$ en $x = 0^+$.
- $f_4(x) = \ln(\mathrm{ch}\,(2x)) - 2\sin(x)\mathrm{sh}\,(x)$ en $x = 0$.
- $f_5(x) = \ln(2\mathrm{ch}\,(x)) - x$ en $x = +\infty$.

Exercice 2.

Les 2 questions sont totalement indépendantes :

1. Les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$:
   (a) Soit $A \in \mathbb{R}$, déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ tel que
   $$f'(x) + f(x) = A.$$
   (b) Déterminer toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ tel que
   $$f'(x) + f(x) = f(0) + f(1).$$
2. Les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$:
   (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer toutes les fonctions f 2 fois dérivables sur $\mathbb{R}$ tel que
   $$f''(x) + \alpha f'(x) + f(x) = 0.$$
   (On discutera selon les valeurs de α.)
   (b) Déterminer pour quelles valeurs de α, la seule solution de
   $$f''(x) + \alpha f'(x) + f(x) = 0$$
   qui s'annule une infinité de fois est la solution nulle.

Exercice 3. On cherche à déterminer toutes les fonctions 2 fois dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y). \quad (\mathcal{P})$$

1. Justifier que
$$\left\{x \mapsto A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{-x}\,;\, A, B \in \mathbb{R}\right\} = \{x \mapsto C\mathrm{ch}\,(x) + D\mathrm{sh}\,(x)\,;\, C, D \in \mathbb{R}\}.$$
2. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, simplifier $\mathrm{ch}\,(x+y) - \mathrm{ch}\,(x)\mathrm{ch}\,(y) - \mathrm{sh}\,(x)\mathrm{sh}\,(y)$.
3. Soit f une solution du problème $(\mathcal{P})$. Montrer $f(0) \in \{0, 1\}$.
4. Montrer qu'il n'y a qu'une solution au problème $(\mathcal{P})$ qui vérifie $f(0) = 0$, la préciser.
5. On suppose maintenant que la fonction f est une solution du problème $(\mathcal{P})$ et que $f(0) = 1$.
   (a) Soit f une solution, étudier la parité de f.
   (b) Montrer que
   $$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f''(x)f(y) = f(x)f''(y).$$
   (à y fixé, on pourra considérer la fonction φ définie par $\varphi(x) = f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)f(y)$ et à x fixé, on pourra considérer la fonction ψ définie par $\psi(y) = f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)f(y)$)
   (c) Montrer que si f est solution alors il existe λ une constante tel que f vérifie l'équation différentielle :
   $$f''(x) + \lambda f(x) = 0 \quad (E).$$
   (d) On suppose que $\lambda > 0$, résoudre (E) puis le problème $(\mathcal{P})$ dans ce cas.
   (e) On suppose que $\lambda \leq 0$, résoudre (E) puis le problème $(\mathcal{P})$ dans ce cas.

Exercice 4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t)^n \mathrm{d}t$.

1. Expliquer pourquoi I_n est bien définie.
2. Etudier les variations de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire qu'elle converge.
3. Calculer en fonction de n, $I_n + I_{n+2}$.
4. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. On pose maintenant, pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ et $n \in \mathbb{N}$:
$$I_n(x) = \int_0^x (\tan t)^n \mathrm{d}t \quad \text{et } S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} I_k(x)$$
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $t \in [0, x]$:
   $$\left|\sum_{k=1}^{n} (\tan t)^k - \frac{\tan t}{1 - \tan t}\right| \leq \frac{(\tan x)^{n+1}}{1 - \tan x}$$
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\left|S_n(x) - \int_0^x \frac{\tan t}{1 - \tan t}\mathrm{d}t\right| \leq x\frac{(\tan x)^{n+1}}{1 - \tan x}$$
   (c) En déduire que $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ (x est fixé) converge et donner sa limite sous forme d'une intégrale.
   (d) On veut désormais exprimer explicitement la limite de $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
      i. Soit f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ par $f(x) = \ln(\cos x - \sin x)$. Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer sa dérivée.
      ii. On pose $J(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{\cos t - \sin t}\mathrm{d}t$ et $K(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\cos t}{\cos t - \sin t}\mathrm{d}t$. Calculer $J(x)$ et $K(x)$.(*On pourra calculer $K(x) + J(x)$ et $K(x) - J(x)$*)
      iii. En déduire l'expression de la limite de $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$.