Devoir surveillé 4

Exercice 1.

- Les développements limités usuelles nous donnent :

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\\ \operatorname{ch}(x) &= 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\end{aligned}$$

  On calcule donc

$$f_1(x)=\frac{x^4}{12}+\underset{x\to 0}{o}(x^4).$$

  On conclut

$$\boxed{f_1(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x^4}{12}.}$$

- En réduisant au même dénominateur et en utilisant les équivalents usuels, on a

$$f_2(x)=\frac{\sin(x)-\operatorname{sh}x}{\sin(x)\operatorname{sh}(x)}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\sin(x)-\operatorname{sh}(x)}{x^2}.$$

  Les développements limités usuelles nous donnent :

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x-\frac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)\\ \operatorname{sh}(x) &= x+\frac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)\end{aligned}$$

  On calcule donc

$$\sin(x)-\operatorname{sh}(x)=-\frac{x^3}{3}+\underset{x\to 0}{o}(x^3),$$

  soit $\sin(x)-\operatorname{sh}(x)\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{x^3}{3}$. On conclut donc

$$\boxed{f_2(x)\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{x}{3}.}$$

- En utilisant les développements limités usuels, on a

$$\operatorname{sh}(x)-x=\frac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

  Donc

$$f_3(x)=\ln\left(\frac{\operatorname{sh}(x)-x}{\frac{x^3}{6}}\cdot\frac{x^3}{6}\right)=\underbrace{\ln\left(\frac{\operatorname{sh}(x)-x}{\frac{x^3}{6}}\right)}_{\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}\ln(1)=0}+\underbrace{3\ln(x)}_{\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}-\infty}-\ln(6)$$

  On conclut que

$$\boxed{f_3(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}3\ln(x).}$$

- On calcule un développement limité à l'ordre de 4. Par les développements limitésusuels, on a

$$\begin{aligned} \ln(1+u) &= u - \frac{u^2}{2} + \underset{u\to 0}{o}(u^2) \\ \mathrm{ch}\,(2x) &= 1 + 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{ch}\,(2x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} 2x^2$, en composant, on a

$$\begin{aligned} \ln(\mathrm{ch}\,(2x)) &= 2x^2 + \frac{2x^4}{3} - \frac{\left(2x^2 + \frac{x^4}{3}\right)^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \\ &= 2x^2 - \frac{4}{3}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\ \mathrm{sh}\,(x) &= x\left(1 + \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \end{aligned}$$

On calcule

$$\sin(x)\mathrm{sh}\,(x) = x^2\left(\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)\left(1 + \frac{x^2}{6}\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) = x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^4).$$

On en déduit $f_4(x) = -\frac{4}{3}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$ et conclut

$$\boxed{f_4(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{4}{3}x^4.}$$

- On

$$f_5(x) = \ln(2\mathrm{ch}\,(x)) - x = \ln\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right) - \ln \mathrm{e}^x = \ln(1 + \mathrm{e}^{-2x}).$$

Comme $\mathrm{e}^{-2x} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$, on conclut

$$\boxed{f_5(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-2x}.}$$

Exercice 2.

1. (a) On a l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$f'(x) + f(x) = A. \quad (E)$$

On résout l'équation homogène au choix par un calcul de primitive ou en utilisant les résultats sur les équations différentielles linéaires à coefficients constants et trouve :

$$\mathcal{S}_{E_h} = \left\{t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-t}\,;\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Pour une solution particulière de l'équation différentielle complète, on remarque que $t \mapsto A$ marche et on conclut

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-t} + A\,;\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

(b) On raisonne par analyse-synthèse :

Analyse :

Soit f une solution du problème.

La fonction f vérifie l'équation différentielle (E) avec $A = f(0)+f(1)$, on en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = t \mapsto \lambda e^{-t} + f(0) + f(1)$. En spécialisant en 0, on obtient

$$f(0) = \lambda + f(0) + f(1).$$

Il faut donc $\lambda = -f(1)$.
En spécialisant en 1, on a alors

$$f(1) = -f(1)e^{-1} + f(0) + f(1).$$

On en déduit que $f(0) = e^{-1}f(1)$.
Les solutions potentielles sont donc de la forme $f : t \mapsto -f(1)e^{-t} + f(1) + e^{-1}f(1)$, on a donc un degré de liberté sur la valeur en 1 de f.
Synthèse :
On vérifie :

$$f(0) + f(1) = \left(-f(1)e^0 + f(1) + e^{-1}f(1)\right) + (-f(1)e^1 + f(1) + e^{-1}f(1)) = f(1) + e^{-1}f(1)$$

et

$$f'(t) + f(t) = f(1)e^{-t} + \left(-f(1)e^{-t} + f(1) + e^{-1}f(1)\right) = f(1) + e^{-1}f(1).$$

On a bien égalité et comme $f(1)$ est un paramètre libre, on conclut donc que l'ensemble des solutions est

$$\boxed{S = \left\{t \mapsto \lambda\left(-e^{-t} + 1 + e^{-1}\right)\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

2. (a) On considère l'équation différentielle homogène à coefficients constants :

$$f''(x) + \alpha f'(x) + f(x) = 0.$$

L'équation caractéristique est $\beta^2 + \alpha\beta + 1 = 0$, soit $\left(\beta + \dfrac{\alpha}{2}\right)^2 + 1 - \dfrac{\alpha^2}{4} = 0$.
On a alors 3 cas à traiter :

- **1er cas :** $1 - \frac{\alpha^2}{4} < 0$, soit $\alpha^2 > 4$.
On a alors 2 racines réelles simples $\beta_1 = -\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4}}{2}$ et $\beta_2 = -\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4}}{2}$. L'ensemble des solutions réelles est alors

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{t \mapsto \lambda_1 e^{\beta_1 t} + \lambda_2 e^{\beta_2 t}\ ;\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\right\}.}$$

- **2ème cas :** $1 - \frac{\alpha^2}{4} = 0$
On a alors une racine réelle double : $\beta = -\frac{\alpha}{2}$. L'ensemble des solutions réelles est alors

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{t \mapsto (\lambda_1 t + \lambda_0)e^{-\frac{\alpha}{2}t}\ ;\ \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}\right\}.}$$

- **3ème cas :** $1 - \frac{\alpha^2}{4} > 0$, soit $\alpha^2 > 4$.
On a alors 2 racines complexes conjuguées simples $\beta_1 = -\frac{\alpha+i\sqrt{4-\alpha^2}}{2}$ et $\beta_2 = -\frac{\alpha-i\sqrt{4-\alpha^2}}{2}$. Soit $\omega = \frac{\sqrt{4-\alpha^2}}{2}$, l'ensemble des solutions réelles est alors

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{t \mapsto \lambda_1\cos(\omega t)e^{-\frac{\alpha}{2}t} + \lambda_2\sin(\omega t)e^{-\frac{\alpha}{2}t}\ ;\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\right\}.}$$

(b) Traitons les 3 cas précédemment listés :

- **1er cas :** $1 - \frac{\alpha^2}{4} < 0$, soit $\alpha^2 > 4$.
Soit f une solution, on a donc $f(t) = \lambda_1 e^{\beta_1 t} + \lambda_2 e^{\beta_2 t}$.
Si $\lambda_1 \neq 0$, on a alors

$$f(t) = \lambda_1 e^{\beta_1 t}\left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}e^{(\beta_2-\beta_1)t}\right).$$

Si $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \geq 0$, il n'y a aucun point d'annulation, car l'exponentielle est strictement positive, d'où pour tout réel t, $\left(1 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}e^{(\beta_2-\beta_1)t}\right) \neq 0$.
Si $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$, il y a un seul point d'annulation $t = \frac{1}{\beta_2-\beta_1}\ln\left(-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)$.
De manière similaire, on traite le cas $\lambda_2 \neq 0$.
On conclut que si $1 - \frac{\alpha^2}{4} < 0$ et que la solution f s'annule une infinité de fois, alors $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
On vérifie réciproquement que si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, la solution est nulle donc elle s'annule une infinité de fois.

- **2ème cas :** $1-\frac{\alpha^2}{4}=0$
  Soit f une solution, on a donc $f(t)=(\lambda_1 t+\lambda_0)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}t}$.
  Si $\lambda_1\neq 0$, on a alors la fonction f ne s'annule que pour $t=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.
  Si $\lambda_1=0$, alors $f(t)=\lambda_0\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}t}$. Si $\lambda_0\neq 0$, la solution ne s'annule jamais.
  On conclut que si $1-\frac{\alpha^2}{4}=0$ et que la solution f s'annule une infinité de fois, alors $\lambda_1=\lambda_0=0$. On vérifie réciproquement que si $\lambda_1=\lambda_0=0$, la solution est nulle donc elle s'annule une infinité de fois.
- **3ème cas :** $1-\frac{\alpha^2}{4}>0$, soit $\alpha^2>4$.
  Soit f une solution, on a donc $f(t)=\lambda_1\cos(\omega t)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}t}+\lambda_2\sin(\omega t)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}t}$.
  Si on utilise la réécriture amplitude et déphasage, on a aussi $f(t)=A\cos(wt+\varphi)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}t}$. Cette fonction s'annule une infinité de fois (toutes les valeurs de t tel que $wt+\varphi\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$).
  On conclut que si $1-\frac{\alpha^2}{4}>0$, toutes les solutions s'annulent une infinité de fois.

On conclut donc

$$\boxed{\text{la solution nulle est la seule solution à s'annuler une infinité de fois si et seulement si } 1-\frac{\alpha^2}{4}\leq 0, \text{ soit si } \alpha\in]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[.}$$

Exercice 3.

1. Montrons le résultat par double inclusion :
   Soit $f\in\left\{x\mapsto A\mathrm{e}^x+B\mathrm{e}^{-x}\,;\,A,B\in\mathbb{R}\right\}$, il existe donc $A,B\in\mathbb{R}$ tel que $f=x\mapsto A\mathrm{e}^x+B\mathrm{e}^{-x}$.
   Les formules usuelles nous donne $\mathrm{ch}\,(x)+\mathrm{sh}\,(x)=\mathrm{e}^x$, en utilisant la parité, on en déduit $\mathrm{ch}\,(x)-\mathrm{sh}\,(x)=\mathrm{e}^{-x}$. On a donc
   $$f=x\mapsto A(\mathrm{ch}\,(x)+\mathrm{sh}\,(x))+B(\mathrm{ch}\,(x)-\mathrm{sh}\,(x))=x\mapsto(A+B)\mathrm{ch}\,(x)+(A-B)\mathrm{sh}\,(x).$$
   En posant $C=A+B$ et $D=A-b$, on a donc bien $f\in\{x\mapsto C\mathrm{ch}\,(x)+D\mathrm{sh}\,(x)\,;\,C,D\in\mathbb{R}\}$.
   Soit $f\in\{x\mapsto C\mathrm{ch}\,(x)+B\mathrm{sh}\,(x)\,;\,C,D\in\mathbb{R}\}$, il existe donc $C,D\in\mathbb{R}$ tel que $f=x\mapsto C\mathrm{ch}\,(x)+D\mathrm{sh}\,(x)$.
   Les formules usuelles nous donnent $\mathrm{ch}\,(x)=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}\,(x)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$.
   $$f=x\mapsto C\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}+D\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}=\frac{C+D}{2}\mathrm{e}^x+\frac{C-D}{2}\mathrm{e}^{-x}.$$
   En posant $A=\frac{C+D}{2}$ et $B=\frac{C-D}{2}$, on a donc $f\in\left\{x\mapsto A\mathrm{e}^x+B\mathrm{e}^{-x}\,;\,A,B\in\mathbb{R}\right\}$.
   On conclut donc
   $$\boxed{\left\{x\mapsto A\mathrm{e}^x+B\mathrm{e}^{-x}\,;\,A,B\in\mathbb{R}\right\}=\{x\mapsto C\mathrm{ch}\,(x)+D\mathrm{sh}\,(x)\,;\,C,D\in\mathbb{R}\}.}$$

2. A partir des définitions de ch et sh, on calcule (si on ne fait pas d'erreur...)
   $$\begin{aligned}\mathrm{ch}\,(x+y)-\mathrm{ch}\,(x)\mathrm{ch}\,(y)-\mathrm{sh}\,(x)\mathrm{sh}\,(y)&=\frac{\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^{-(x+y)}}{2}-\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-y}}{2}-\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y}}{2}\\&=0\end{aligned}$$
   On conclut
   $$\boxed{\forall x,y\in\mathbb{R},\ \mathrm{ch}\,(x+y)=\mathrm{ch}\,(x)\mathrm{ch}\,(y)+\mathrm{sh}\,(x)\mathrm{sh}\,(y).}$$

3. En spécialisant, en $x=y=0$, l'équation fonctionnelle, on obtient
   $$2f(0)=2f(0)^2.$$
   Le nombre $f(0)$ est donc solution de $2\alpha=\alpha^2$ et on conclut donc bien que
   $$\boxed{f(0)\in\{0,1\}.}$$

4. Si on suppose que la fonction f est solution de $(\mathcal{P})$ et $f(0) = 0$, alors on spécialise l'équation en $y = 0$ et on obtient
$$2f(x) = 2f(0)f(x) = 0.$$
Ceci étant vrai pour tout x, on en déduit que le fonction f est nulle. On vérifie que la fonction nulle est solution de $(\mathcal{P})$.
On conclut
$$\boxed{\text{La seule solution de } (\mathcal{P}) \text{ nulle en } 0 \text{ est la fonction nulle.}}$$

5. On suppose maintenant que la fonction f est une solution du problème et que $f(0) = 1$.
   (a) Soit spécialisant en $x = 0$, on obtient
   $$f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y) = 2f(y),$$
   soit $f(-y) = f(y)$, si étant vrai pour tout y, on conclut
   $$\boxed{\text{Une solution } f \text{ est une fonction paire.}}$$
   (b) Comme f vérifie $(\mathcal{P})$, on a
   $$f(x + y) + f(x - y) - 2f(x)f(y) = 0.$$
   On en déduit que les fonctions φ et ψ sont identiquement nulles. Comme f est deux fois dérivables, par les règle de composition des fonctions dérivables, on a φ et ψ 2 fois dérivables. Il en résulte
   $$\varphi''(x) = f''(x + y) + f''(x - y) - 2f''(x)f(y) = 0$$
   $$\psi''(y) = f''(x + y) + f''(x - y) - 2f(x)f''(y) = 0.$$
   En égalisant les 2 membres, on a donc bien
   $$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f''(x)f(y) = f(x)f''(y).}$$
   (c) On peut spécialiser le résultat dans la question précédente en $y = 0$ et on obtient
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x)f(0) = f(x)f''(0),$$
   soit
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = f(x)f''(0).$$
   En posant, $\lambda = -f''(0)$, on a bien
   $$\boxed{f \text{ solution de } f''(x) + \lambda f(x) = 0 \quad (E).}$$
   (d) On a l'équation caractéristique de (E), $\alpha^2 + \lambda = 0$. Les racines sont imaginaires pures et il en résulte que l'ensemble des solutions réelles est
   $$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{x \mapsto A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)\,;\ A, B \in \mathbb{R}\right\}.}$$
   Faisons la synthèses pour $(\mathcal{P})$. Si $f(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$, en spécialisant en $x = 0$, on a alors $f(0) = A$, donc $A = 1$.
   Puis comme f doit être paire, on a $f(x) = f(-x)$ pour tout x, il résulte
   $$\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x) = \cos(\sqrt{\lambda}x) - B\sin(\sqrt{\lambda}x).$$
   Comme la fonction sin n'est pas identiquement nul, on choisit x tel que $\sin(\sqrt{\lambda}x) \neq 0$, on donc $B = 0$. Il en résulte que f est nécessairement de la forme $f(x) = \cos(\sqrt{\lambda}x)$. On vérifie par le formulaire trigonométrique
   $$\cos(\sqrt{\lambda}(x + y)) + \cos(\sqrt{\lambda}(x - y)) - 2\cos(\sqrt{\lambda}x)\cos(\sqrt{\lambda}y) = 0.$$
   On conclut que
   $$\boxed{\text{si } \lambda = -f''(0) > 0, \text{ alors la seule solution de } (\mathcal{P}) \text{ est } x \mapsto \cos(\sqrt{\lambda}x).}$$
   (e) Si $\lambda < 0$, on résout de (E) et en utilisant la question 1., en posant $\gamma = \sqrt{-\lambda}$ on trouve que

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \{x \mapsto A\mathrm{ch}\,(\gamma x) + B\mathrm{sh}\,(\gamma x)\,;\, A, B \in \mathbb{R}\}.}$$

Pour la synthèse, on spécialise en 0 et trouve que nécessairement une solution de $(\mathcal{P})$ est de la forme $x \mapsto \mathrm{ch}\,(\gamma x) + B\mathrm{sh}\,(\gamma x)$. Puis comme f doit être paire, on a $f(x) = f(-x)$ pour tout x, il résulte

$$\mathrm{ch}\,(\sqrt{\lambda}x) + B\mathrm{sh}\,(\sqrt{\lambda}x) = \mathrm{ch}\,(\sqrt{\lambda}x) - B\mathrm{sh}\,(\sqrt{\lambda}x).$$

Comme la fonction sh n'est pas identiquement nul, on choisit x tel que $\mathrm{sh}\,(\sqrt{\lambda}x) \neq 0$, on a donc $B = 0$.

Grâce à la question 2, la fonction obtenue fonctionne et on conclut que

$$\boxed{\text{si } \lambda = -f''(0) < 0, \text{ alors la seule solution de } (\mathcal{P}) \text{ est } x \mapsto \mathrm{ch}\,(\sqrt{-\lambda}x).}$$

Il reste le cas $\lambda = 0$, les solutions de (E) seront de la forme $x \mapsto Ax + B$ et on vérifiera que

$$\boxed{\text{si } \lambda = -f''(0) = 0, \text{ alors la seule solution de } (\mathcal{P}) \text{ est } x \mapsto 1.}$$

Exercice 4.

1. La fonction tan est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\}$ donc continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{4}]$. La fonction $t \mapsto (\tan t)^n$ est donc continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

$$\boxed{I_n \text{ est donc bien définie.}}$$

2. On a, par linéarité,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t)^n (\tan t - 1)\mathrm{d}t.$$

Pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, on a $0 \leq \tan t \leq 1$ et on en déduit

$$(\tan t)^n (\tan t - 1) \leq 0$$

et

$$0 \leq (\tan t)^n.$$

Par intégration de ces inégalités sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, on a donc

$$I_{n+1} - I_n \leq 0$$

et

$$0 \leq I_n.$$

$$\boxed{\text{La suite } (I_n) \text{ est décroissante minorée par 0, donc converge vers une limite finie } \ell.}$$

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $t \in [0, x]$, par sommation des termes d'une suite géométrique, comme $\tan t \neq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} (\tan t)^k - \frac{\tan t}{1 - \tan t} = \frac{\tan t - (\tan t)^{n+1}}{1 - \tan t} - \frac{\tan t}{1 - \tan t} = -\frac{(\tan t)^{n+1}}{1 - \tan t}$$

Comme $0 < \tan(t) \leq \tan(x) < 1$, on en déduit

$$0 \leq (\tan t)^n \leq (\tan x)^n \quad et \quad 0 \leq \frac{1}{1 - \tan t} \leq \frac{1}{1 - \tan x},$$

d'où

$$\boxed{\left| \sum_{k=1}^{n} (\tan t)^k - \frac{\tan t}{1 - \tan t} \right| = \frac{(\tan t)^{n+1}}{1 - \tan t} \leq \frac{(\tan x)^{n+1}}{1 - \tan x}.}$$

(b) Grâce à la question précédente, on a, par linéarité de l'intégrale et en utilisant l'inégalité de la moyenne,

$$\begin{aligned}
\left|S_n(x) - \int_0^x \frac{\tan t}{1-\tan t}\mathrm{d}t\right| &= \left|\sum_{k=1}^n I_k(x) - \int_0^x \frac{\tan t}{1-\tan t}\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^n \int_0^x (\tan t)^k \mathrm{d}t - \int_0^x \frac{\tan t}{1-\tan t}\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_0^x \left(\sum_{k=1}^n (\tan t)^k - \frac{\tan t}{1-\tan t}\right)\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_0^x \left|\sum_{k=1}^n (\tan t)^k - \frac{\tan t}{1-\tan t}\right|\mathrm{d}t \\
&\leq x\frac{(\tan x)^{n+1}}{1-\tan x}
\end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{\left|S_n(x) - \int_0^x \frac{\tan t}{1-\tan t}\mathrm{d}t\right| \leq x\frac{(\tan x)^{n+1}}{1-\tan x}.}$$

(c) Comme $0 < x < \frac{\pi}{4}$, on a $0 < \tan x < 1$ et donc

$$\lim_n x\frac{(\tan x)^{n+1}}{1-\tan x} = 0.$$

On en déduit que

$$\lim_n \left|S_n(x) - \int_0^x \frac{\tan t}{1-\tan t}\mathrm{d}t\right| = 0.$$

Comme la fonction $t \mapsto \frac{\tan t}{1-\tan t}$ est continue sur $[0,x]$ (car $\tan t \neq 1$), l'intégrale $\int_0^x \frac{\tan t}{1-\tan t}dt$ est bien définie.
On conclut donc

$$\boxed{\lim_n S_n(x) = \int_0^x \frac{\tan t}{1-\tan t}\mathrm{d}t.}$$

(d) On veut désormais exprimer explicitement la limite de $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

i. On a

$$f(x) = \ln(\cos x - \sin x) = \ln\left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)\right) = \ln\left(\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

On en déduit que pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}[$, $\cos(x+\frac{\pi}{4}) > 0$. La fonction f est donc définie et continûment dérivable sur $[0, \frac{\pi}{4}[$ comme composée de fonctions qui le sont et

$$\boxed{f'(x) = -\frac{\cos(x)+\sin(x)}{\cos(x)-\sin(x)}.}$$

ii. On a

$$\begin{aligned}
J(x)+K(x) &= \int_0^x \frac{\sin t}{\cos t - \sin t}\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{\cos t}{\cos t - \sin t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \frac{\sin(t)+\cos t}{\cos t - \sin t}\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = [-\ln(\cos t - \sin t)]_0^x = -\ln(\cos x - \sin x),
\end{aligned}$$

et

$$J(x) - K(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)-\cos t}{\cos t - \sin t}\mathrm{d}t = -\int_0^x \mathrm{d}t = -x.$$

On a donc

$$\boxed{J(x) = \frac{-x - \ln(\cos x - \sin x)}{2} \quad \text{et} \quad K(x) = \frac{x - \ln(\cos x - \sin x)}{2}.}$$

iii. On a

$$\frac{\tan t}{1 - \tan t} = \frac{\frac{\sin t}{\cos t}}{1 - \frac{\sin t}{\cos t}} = \frac{\sin t}{\cos t - \sin t}.$$

D'où

$$\boxed{\lim_n S_n(x) = \int_0^x \frac{\tan t}{1 - \tan t} \mathrm{d}t = J(x) = \frac{-x - \ln(\cos x - \sin x)}{2}.}$$