Devoir surveillé 3 corrigé

Exercice 1.

1. Les développements limités usuels nous donnent :

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\ \operatorname{sh}(x) &= x + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\ \tan(x) &= x + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \end{aligned}$$

On en déduit $\operatorname{sh}(x) - \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{3}$ et $\tan(x) - x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{3}$.
Il en résulte $\frac{\operatorname{sh}(x)-\sin(x)}{\tan(x)-x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^3}{3}}{\frac{x^3}{3}} = 1$ et on conclut $\boxed{\frac{\operatorname{sh}(x)-\sin(x)}{\tan(x)-x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.}$

2. $\frac{e^{3x}-e^{2x}-\sin(x)}{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1+2x}-\frac{x}{2}}$ en $x=0$. Les développements limités usuels nous donnent :

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \\ \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \end{aligned}$$

Par composition, on en déduit

$$e^{3x} - e^{2x} - \sin(x) = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 - 1 - 2x - \frac{4x^2}{2} - x + \underset{x\to 0}{o}(x^2) = \frac{5}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

et

$$\sqrt{1+3x} - \sqrt{1+2x} - \frac{x}{2} = 1 + \frac{3x}{2} - \frac{9x^2}{8} - 1 - \frac{2x}{2} - \frac{4x^2}{8} - \frac{x}{2} = -\frac{5}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

On en déduit que $e^{3x} - e^{2x} - \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{5}{2}x^2$ et $\sqrt{1+3x} - \sqrt{1+2x} - \frac{x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{5}{8}x^2$ et on conclut $\boxed{\frac{e^{3x}-e^{2x}-\sin(x)}{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1+2x}-\frac{x}{2}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -4.}$

3. En factorisant, on a

$$e^{x^2+1} - e^{2x} = e^{2x}\left(e^{x^2+1-2x} - 1\right) = e^{2x}\left(e^{(x-1)^2} - 1\right).$$

Comme $e^{2x} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} = e^2$ et $(x-1)^2 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} = 0$, on en déduit $e^{x^2+1} - e^{2x} \underset{x\to 0}{\sim} e^2(x-1)^2$.

Pour le dénominateur, on pose $x = 1+h$. On obtient alors, par les développements limités usuels,

$$\ln(x) - x + 1 = \ln(1+h) - h = -\frac{h^2}{2} + \underset{h \to 0}{o}(h^2),$$

soit $\ln(x) - x + 1 \underset{x \to 1}{\sim} -\dfrac{(x-1)^2}{2}$.

Il en résulte $\dfrac{\mathrm{e}^{x^2+1} - \mathrm{e}^{2x}}{\ln(x) - x + 1} \underset{x \to 1}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^2(x-1)^2}{-\frac{(x-1)^2}{2}}$ et on conclut $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^{x^2+1} - \mathrm{e}^{2x}}{\ln(x) - x + 1} \underset{x \to 1}{\longrightarrow} -2\mathrm{e}^2.}$

4. On a en mettant au même dénominateur et par les équivalents usuels

$$\frac{1}{(\ln(1+x))^n} - \frac{1}{x^n} = \frac{x^n - (\ln(1+x))^n}{x^n \ln(1+x)^n} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^n - (\ln(1+x))^n}{x^{2n}}$$

Par normalisation, on a

$$\ln(1+x) = x\left(1 - \frac{x}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x)\right),$$

d'où $(\ln(1+x))^n = x^n\left(1 - \dfrac{x}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x)\right)^n = x^n\left(1 - \dfrac{n}{2}x + \underset{x \to 0}{o}(x)\right)$. On en déduit

$$x^n - (\ln(1+x))^n = -\frac{n}{2}x^{n+1} + \underset{x \to 0}{o}(x^{n+1}).$$

Si $n \neq 0$, on a donc

$$\frac{1}{(\ln(1+x))^n} - \frac{1}{x^n} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{-\frac{n}{2}x^{n+1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{2x^{n-1}}.$$

On conclut

$\boxed{\text{$\frac{1}{(\ln(1+x))^n} - \frac{1}{x^n}$ a une limite nulle en $x=0$ pou $n=0$, une limite égale à $-\frac{1}{2}$ en $x=0$ pour $n=1$ et une limite infinie en $x=0$ pou $n \geq 2$.}}$

Exercice 2.

Traitons d'abord le cas, où $\frac{\mathrm{e}^{ix}}{\cos(x)} \neq 1$, on a alors

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\mathrm{e}^{ix}}{\cos(x)}\right)^k = \frac{1 - \left(\dfrac{\mathrm{e}^{ix}}{\cos(x)}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{\mathrm{e}^{ix}}{\cos(x)}} = \frac{\cos(x)^{n+1} - e^{i(n+1)x}}{\cos^n(x)\left(\cos(x) - \mathrm{e}^{ix}\right)} = \frac{\cos(x)^{n+1} - e^{i(n+1)x}}{\cos^n(x)(-i\sin(x))}.$$

En passant à la partie réelle, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos(x)^k} = \frac{\sin\left((n+1)x\right)}{\cos^n(x)\sin(x)}.$$

Dans un premier temps, on doit donc résoudre

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{ix}}{\cos(x)} \neq 1 \\ x \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\ \sin\left((n+1)x\right) = 0. \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{cases} \dfrac{e^{ix}}{\cos(x)} \neq 1 \\ x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \\ (n+1)x \equiv 0[\pi]. \end{cases}$$

Puis comme $\left|\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right| = \frac{1}{|\cos(x)|}$, la condition $\frac{e^{ix}}{\cos(x)} \neq 1$ est équivalente à $x \not\equiv 0[\pi]$ (Vérification à faire).

On en déduit

$$\begin{cases} x \not\equiv 0[\pi] \\ x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \\ x \equiv 0[\frac{\pi}{n+1}]. \end{cases}$$

Les solutions sont donc alors $x = k\frac{\pi}{n+1}$ avec $\frac{k}{n+1}$ n'est pas un entier ni congru à $\frac{1}{2}$ modulo 1.

Il reste le cas où une solution x vérifierait $x \equiv 0[\pi]$. On vérifie que si $x \equiv 0[2\pi]$ ou $x \equiv \pi[2\pi]$, il ne peut être solution.

On conclut

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{k\frac{\pi}{n+1} \quad ; \quad k \in \mathbb{Z} \text{ et } \frac{k}{n+1} \not\equiv 0\left[\frac{1}{2}\right]\right\}.}$$

Exercice 3.

1. Comme $f_0 = t \mapsto 1$, on en déduit

$$F_0(x) = \int_0^x 1\mathrm{d}t = x.$$

Comme $f_1 = t \mapsto \frac{2}{e^t+e^{-t}}$ et $\frac{2}{e^t+e^{-t}} = \frac{2e^t}{1+e^{2t}} = 2\frac{(e^t)'}{1+(e^t)^2}$, on en déduit

$$F_1(x) = \int_0^x 2\frac{(e^t)'}{1+(e^t)^2}\mathrm{d}t = 2\left[\arctan(e^t)\right]_0^x = 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}.$$

Comme $f_2 = t \mapsto \frac{4}{(e^t+e^{-t})^2}$ et $\frac{4}{(e^t+e^{-t})^2} = \frac{4e^{2t}}{e^{4t}+2e^{2t}+1}$, on peut poser le changement de variable $y = e^{2t}$, soit $2e^{2t}\mathrm{d}t = \mathrm{d}y$ et on a (en modifiant correctement les bornes) :

$$F_1(x) = \int_0^x 4\frac{e^{2t}}{e^{4t}+2e^{2t}+1}\mathrm{d}t = 2\int_1^{e^{2x}} \frac{\mathrm{d}y}{y^2+2y+1} = 2\int_1^{e^{2x}} \frac{\mathrm{d}y}{(1+y)^2} = 2\left[-\frac{1}{y+1}\right]_1^{e^{2x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

On conclut

$$\boxed{F_0(x) = x, \quad F_1(x) = 2\arctan(e^x) - \tfrac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad F_2(x) = \tfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.}$$

2. On conclut directement en utilisant la question précédente que

$$\boxed{F_0 \text{ n'a pas de limite finie en } +\infty \text{ et } F_1 \text{ a pour limite } u_1 = \tfrac{\pi}{2} \text{ en } +\infty.}$$

Pour F_2, on a, par les équivalents usuels,

$$F_2(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{2x}}{e^{2x}} = 1.$$

On conclut donc que

$$\boxed{F_2 \text{ a pour limite } u_2 = 1 \text{ en } +\infty.}$$

3. En utilisant l'indication, on calcule

$$F_n(x) - F_{n+2}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{ch}^2(t)-1}{(\operatorname{ch}(t))^{n+2}}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\operatorname{sh}^2(t)}{(\operatorname{ch}(t))^{n+2}}\mathrm{d}t.$$

Comme les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$, on peut faire l'intégration par parties suivante

$$\begin{cases} u'(t) = \frac{\operatorname{sh}(t)}{(\operatorname{ch}(t))^{n+2}} & u(t) = -\frac{1}{(n+1)(\operatorname{ch}(t))^{n+1}} \\ v(t) = \operatorname{sh}(t) & v'(t) = \operatorname{ch}(t) \end{cases}$$

et on obtient alors

$$\begin{aligned} F_n(x) - F_{n+2}(x) &= \left[-\frac{1}{(n+1)(\operatorname{ch}(t))^{n+1}}\operatorname{sh}(t)\right]_0^x - \int_0^x -\frac{1}{(n+1)(\operatorname{ch}(t))^{n+1}}\operatorname{ch}(t)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\operatorname{sh}(x)}{(n+1)(\operatorname{ch}(x))^{n+1}} + \frac{1}{n+1}F_n(x) \end{aligned}$$

En manipulant les 2 membres, on conclut donc bien

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_{n+2}(x) = \tfrac{n}{n+1}F_n(x) + \frac{\operatorname{sh} x}{(n+1)\left(\operatorname{ch} x\right)^{n+1}}.}$$

4. Montrons par récurrence que

$$\forall n \geq 1, \qquad F_n \text{ et } F_{n+1} \text{ ont une limite finie en } +\infty.$$

Initialisation :
Pour $n=1$, le résultat a été démontré à la question 2.
Hérédité :
Soit $n \geq 1$ fixé, tel que

$$F_n \text{ et } F_{n+1} \text{ ont une limite finie en } +\infty.$$

On a grâce à la question 3,

$$F_{n+2}(x) = \frac{n}{n+1}F_n(x) + \frac{\operatorname{sh} x}{(n+1)\left(\operatorname{ch} x\right)^{n+1}}.$$

Comme $\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$ et $\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$, on a

$$\frac{\operatorname{sh} x}{(n+1)\left(\operatorname{ch} x\right)^{n+1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{e^x}{2}}{(n+1)\left(\dfrac{e^x}{2}\right)^{n+1}} = \frac{2^n}{(n+1)e^{nx}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (\text{car } n>0)$$

Comme F_n admet une limite finie u_n en $+\infty$, on en déduit F_{n+2} admet une limite finie $u_{n+2} = \frac{n}{n+1}u_n$.
On conclut donc

$$F_{n+1} \text{ et } F_{n+2} \text{ ont une limite finie en } +\infty.$$

La propriété est donc initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout n.
On conclut donc que

$\boxed{\begin{array}{l}\forall n \geq 1, \quad F_n \text{ admet une limite finie } u_n \text{ en } +\infty \text{ et la suite } (u_k)_{k\geq 1} \text{ vérifie } u_1 = \frac{\pi}{2}, \\ u_2 = 1 \text{ et} \\ \qquad\qquad \forall k \geq 1, \quad u_{k+2} = \dfrac{k}{k+1} u_k\end{array}}$

5. Pour obtenir un développement limité à l'ordre 5 en 0 de F_n calculons un développement limité d'ordre 4 de sa dérivée, on a par les développements limités usuels, comme l'entier n est fixé,

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{ch}\,(t) & = & 1 + \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^4}{24} + \underset{t\to 0}{o}(t^4) \\ (1+u)^{-n} & = & 1 - nu + \dfrac{n(n+1)}{2}u^2 + \underset{t\to 0}{o}(u^2)\end{array}$$

En composant ($u = \mathrm{ch}\,(t) - 1 = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + \underset{t\to 0}{o}(t^4)$), on a donc

$$\frac{1}{(\mathrm{ch}\,(t))^n} = 1 - n\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}\right) + \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}\right)^2 + \underset{t\to 0}{o}(u^2) + \underset{t\to 0}{o}(t^4),$$

Comme $\mathrm{ch}\,(t) - 1 \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$, on en déduit

$$\frac{1}{(\mathrm{ch}\,(t))^n} = 1 - \frac{n}{2}t^2 + \left(-\frac{n}{24} + \frac{n(n+1)}{8}\right)t^4 + \underset{t\to 0}{o}(t^4),$$

soit

$$f_n(t) = 1 - \frac{n}{2}t^2 + \frac{n(n-2)}{8}t^4 + \underset{t\to 0}{o}(t^4).$$

Comme $F_n(0) = 0$, on en déduit par primitivation des développements limités

$$\boxed{F_n(x) = x - \tfrac{n}{6}x^3 + \tfrac{n(n-2)}{40}x^5 + \underset{t\to 0}{o}(x^5).}$$

Exercice 4.

1. Comme -1 n'est pas solution, on a z est solution si et seulement si

$$\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^n = -1.$$

Comme $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}}$ est une racine n-ème de -1, on en déduit qu'il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que

$$\frac{1-z}{1+z} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}}\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} = \mathrm{e}^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}.$$

On en déduit

$$(1-z) = (1+z)\mathrm{e}^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}},$$

soit

$$(1 + \mathrm{e}^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}})z = 1 - \mathrm{e}^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}.$$

On remarque qu'il faut exclure le cas où $\mathrm{e}^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}} = -1$, l'équation n'a alors pas de solution $0z = 2$. Sous cette condition, on divise et on obtient

$$z = \frac{1 - \mathrm{e}^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}}{1 + \mathrm{e}^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}} = \frac{\mathrm{e}^{-i\frac{(2k+1)\pi}{2n}} - \mathrm{e}^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}}}{\mathrm{e}^{-i\frac{(2k+1)\pi}{2n}} + \mathrm{e}^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}}} = -i\tan\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right).$$

Les valeurs de k à exclure sont celles tel que $\mathrm{e}^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}} = -1$, ce qui est équivalent à $\frac{(2k+1)\pi}{n} \equiv \pi[2\pi]$.
Il faut donc exclure les valeurs de k tel que $2k+1 \equiv n[2n]$, soit $k \equiv \frac{n-1}{2}[n]$.
Comme k est un entier, pour qu'une telle valeur existe, il faut n impair, puis comme $k \in [\![0, n-1]\!]$, la seule valeur alors à exclure est $\frac{n-1}{2}$.
On conclut que l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-i\tan\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \; ; \; k \in [\![0, n-1]\!] \setminus \left\{\frac{n-1}{2}\right\}\right\}.}$$

2. Utilisons la formule du binôme de Newton et séparons les termes pairs et impairs. On obtient

$$(a+b)^n = \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k} a^{2k} b^{n-2k} + \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k+1} a^{2k+1} b^{n-2k-1}.$$

En spécialisant, $a = \alpha$ et $b = 1$, on obtient

$$(1+\alpha)^n = \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k} \alpha^{2k} + \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k+1} \alpha^{2k+1} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k} \beta^k + \alpha \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k+1} \beta^k.$$

De même en prenant $a = -\alpha$ et $b = 1$, on obtient

$$(1-\alpha)^n = \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k} (-\alpha)^{2k} + \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k+1} (-\alpha)^{2k+1} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k} \beta^k - \alpha \sum_{k\in\mathbb{N}} \beta^k.$$

Par sommation, on conclut donc

$$\boxed{\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k} \beta^k = \frac{1}{2}\left((1+\alpha)^n + (1-\alpha)^n\right).}$$

3. Grâce à la question précédente, on déduit que β est solution de (E_n) si et seulement les racines carrées de β sont racines de $(1-z)^n + (1+z)^n = 0$. En utilisant la question 1, on en déduit que les racines de (E_n) sont de la forme $\alpha_k = -\tan^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ avec $k \in [\![0, n-1]\!] \setminus \left\{\frac{n-1}{2}\right\}$. Comme $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$, on a $\alpha_k = \alpha_{n-1-k}$, on peut réduire l'intervalle d'entiers et on conclut

$$\boxed{\mathcal{S}_{E_n} = \left\{-\tan^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \; ; \; k \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad 0 \leq k < \frac{n-1}{2}\right\}.}$$

Comme $0 \leq k < \frac{n-1}{2}$, on a $\frac{(2k+1)\pi}{2n} \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et la fonction $t \mapsto \tan^2(t)$ est bijective de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}^+$. On a donc bien déterminé l'ensemble des solutions. Il y a donc $\frac{n-1}{2}$ solutions distinctes si n impair et $\frac{n}{2}$ solutions distinctes si n pair.

Exercice 5.

Soit $a \in \mathbb{R}^+$, on déterminer le lieu géométrique des points M d'affixe z tel que

$$\frac{|z|}{|z-1|} = A.$$

Comme tout est positif, on peut mettre au carré et l'équation est donc équivalente à

$$\left\{ \begin{array}{c} z \neq 1 \\ |z|^2 = a^2 |z-1|^2 . \end{array} \right.$$

En passant sous forme cartésienne $z = x + iy$, on a $|z|^2 = x^2 + y^2$ et $|z-1|^2 = (x-1)^2 + y^2$. L'équation $|z|^2 = a^2 |z-1|^2$ devient $x^2 + y^2 = a^2(x-1)^2 + a^2 y^2$, soit

$$(1-a^2)x^2 + 2a^2 x + (1-a^2)y^2 - a^2 = 0.$$

Si $1 - a^2 = 0$, soit $a = 1$, on obtient $2x - 1 = 0$. Le lieu géométrique est une droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.

Si $1 - a^2 \neq 0$, on a alors $x^2 + 2\frac{a^2}{1-a^2}x + y^2 - \frac{a^2}{1-a^2} = 0$.

D'où $\left(x + \dfrac{a^2}{1-a^2}\right)^2 + y^2 - \dfrac{a^4}{(1-a^2)^2} - \dfrac{a^2}{1-a^2} = 0$. On en déduit

$$\left(x + \frac{a^2}{1-a^2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{(1-a^2)^2}.$$

On trouve alors un cerce de centre $\omega\left(\dfrac{-a^2}{1-a^2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{|1-a^2|}$.