# Devoir surveillé 2

**Consignes :**

- Calculatrice interdite.
- Ne mélanger pas les exercices, une nouvelle copie pour chaque exercice.
- Numéroter chaque copie et mettre son nom sur chaque feuille.
- Encadrer les résultats.
- Les phrases d'explications courtes et claires avant tout calcul peut permettre de gagner des points.
- Les copies dont la propreté et la présentation laissent à désirer seront sanctionnées (Les ratures et les plaques de blanc correcteur sont à bannir).

**Exercice 1.**

Simplifier l'expression de la fonction $g_n$ définie par

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^3(3^k x)}{3^k}.$$

En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la suite $(g_n(\alpha))$ converge vers une limite que l'on précisera.

*(Penser à linéariser)*

**Exercice 2.**

On parle de racines imbriquées pour une expression ne faisant intervenir que de nombres entiers et des racines carrées.

Exemple : $\sqrt{\frac{6-\sqrt{17}}{4}}$.

Si $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ ($\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\quad a_k \in \mathbb{C}$) d'indéterminée $X$, on dit que le nombre complexe $\alpha$ est un zéro de $Q$, si $\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k = 0$.

On considère le polynôme $P = X^5 - 1$.

1. Exprimer sous forme exponentielle les zéros de $P$.
2. Expression sous forme de racines imbriquées des zéros de $P$.
   (a) Déterminer un polynôme $Q$ tel que
   $$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = (z-1)Q(z).$$
   (b) Déterminer 3 complexes $a, b, c$ tel que
   $$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \frac{Q(z)}{z^2} = a\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + b\left(z + \frac{1}{z}\right) + c.$$
   (c) Résoudre $az^2 + bz + c = 0$.
   (d) Déterminer tous les racines de $P$ sous forme de racines imbriquées.
3. Donner des expressions algébriques (c'est-à-dire avec des racines imbriquées de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

**Exercice 3.**

*(La question 3. est indépendante des précédentes.)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, on définir les fonctions $D_n$ et $F_n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \quad et \quad F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} D_k(x).$$

1. Exprimer $D_n(x)$ de la manière la plus condensée possible.
   *(On discutera selon les valeurs de $x$.)*
2. Exprimer $F_n(x)$ de la manière la plus condensée possible.
3. Une suite :
   On fixe $m \in \mathbb{N}$ et on définit la suite $(u_n)$ par

   $$u_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} F_n(x) \cos(mx) \mathrm{d}x.$$

   (a) Justifier que $D_n(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$.

   (b) Pour $a, b \in \mathbb{N}$, calculer
   $$I(a, b) = \int_0^{2\pi} \cos(at) \cos(bt) \mathrm{d}t.$$

   (c) Expliciter la valeur de $u_n$.

   (d) Déterminer la limite de $(u_n)$.

**Exercice 4.**

1. Soit $f$ la fonction définie sur $[0, \pi]$ par

   $$\forall x \in [0, \pi], \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{5 - 4\cos(x)}}$$

   (a) Calculer la dérivée de $f$. Vérifier que $f'(x)$ est du signe de $\cos(x) - \frac{1}{2}$.

   (b) En déduire les variations de $f$ sur $[0, \pi]$, et tracer sa courbe représentative.

2. Soit $g$ la fonction définie sur $[0, \pi]$ par

   $$\forall x \in [0, \pi], \quad g(x) = \arccos\left(\frac{4 - 5\cos(x)}{5 - 4\cos(x)}\right)$$

   (a) Vérifier que $g$ est bien définie en tout point de $[0, \pi]$.

   (b) Pour $x \in [0, \pi]$, simplifier les expressions $\cos(g(x))$ et $\sin(g(x))$. (On démontrera les formules de composition utilisées.)

   (c) Calculer $g'(x)$ pour $x \in ]0, \pi[$ après avoir montré que c'est autorisé !(*pour cela, on pourra dériver la relation donnant* $\cos(g(x))$ *obtenue à la question précédente*).

   (d) Vérifier que $\forall x \in [0, \pi], \quad g(g(x)) = x$. Qu'en déduit-on concernant la courbe $(\Gamma)$ représentant $g$ ?

   (e) Construire la courbe $(\Gamma)$.

3. Soit $x$ un réel appartenant à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{3}]$.

   (a) Montrer qu'il existe un unique réel $z$ appartenant à $[\frac{\pi}{3}, \pi]$ tel que $f(z) = f(x)$.

   (b) Montrer que $z = g(x)$.