Devoir surveillé 2 corrigé

Exercice 1. Linéarisons $\sin^3(x)$, on a

$$\begin{aligned}
\sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\
&= \frac{e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}}{-8i} \\
&= \frac{2i\sin(3x)-6i\sin(x)}{-8i} \\
&= \frac{3}{4}\sin(x)-\frac{1}{4}\sin(3x).
\end{aligned}$$

On en déduit, par un décalage d'indices

$$\begin{aligned}
g_n(x) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{\sin^3(3^k x)}{3^k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4\cdot 3^k}\sin(3^k x)-\frac{1}{4\cdot 3^k}\sin(3^{k+1}x) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(3^k x)}{3^{k-1}}-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(3^{k+1}x)}{3^k} \\
&= \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(3^k x)}{3^{k-1}}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{\sin(3^k x)}{3^{k-1}}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\sin(x)-\frac{\sin(3^{n+1}x)}{3^n}\right)
\end{aligned}$$

On conclut donc

$$\boxed{g_n(x)=\tfrac{1}{4}\left(\sin(x)-\frac{\sin(3^{n+1}x)}{3^n}\right).}$$

Pour α fixé, on a donc

$$g_n(\alpha)=\frac{1}{4}\left(\sin(\alpha)-\frac{\sin(3^{n+1}\alpha)}{3^n}\right).$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$-1\leq\sin(3^{n+1}\alpha)\leq 1,$$

On en déduit

$$-\frac{1}{3^n}\leq\frac{\sin(3^{n+1}\alpha)}{3^n}\leq\frac{1}{3^n}.$$

Par passage à la limite, en utilisant le théorème des gendarmes, il en résulte

$$\lim_n\frac{\sin(3^{n+1}\alpha)}{3^n}=0.$$

On conclut

$$\boxed{\lim_n g_n(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{4}.}$$

Exercice 2.

.

1. Soit on utilise son cours, soit on fait une analyse-synthèse (on redémontre le cours...), dans les 2 cas, on obtient l'ensemble des zéros de P est

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{5}} \ ; \ k \in [\![0, 4]\!] \right\}.}$$

2. Expression sous forme de racines imbriquées des zéros de P.

   (a) En utilisant les identités remarques, on a

$$X^5 - 1 = X^5 - 1^5 = (X - 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1).$$

   On conclut que

$$\boxed{\text{le polynôme } Q = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \text{ convient.}}$$

   (b) On développe d'un côté

$$a\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + b\left(z + \frac{1}{z}\right) + c = az^2 + bz + \frac{b}{z} + a\frac{1}{z^2} + 2a + c$$

   et de l'autre

$$\frac{Q(z)}{z^2} = z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}.$$

   Par identification, on vérifie qu'il suffit que $a = b = 1$ et $c = -1$.
   On conclut

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \frac{Q(z)}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1.}$$

   (c) On résout l'équation $z^2 + z - 1$ par la méthode de son choix et on obtient les 2 racines

$$\boxed{\tfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \tfrac{-1-\sqrt{5}}{2}.}$$

   (d) Si α est une racine de P différente de 1, on a donc $Q(\alpha) = 0$, puis comme $Q(0) = 1$, on en déduit $\alpha \neq 0$ et le problème est donc équivalent à $\frac{Q(\alpha)}{\alpha^2}$, il faut et suffit donc que $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ soit racine de $z^2 + z - 1$.
   On résout

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2},$$

   soit

$$\alpha^2 - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\alpha + 1 = 0.$$

   Le discriminant est alors $\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - 4 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{-5 - \sqrt{5}}{2} < 0$. Il y a donc 2 racines complexes

$$\frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \pm i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \pm i\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

   De manière, on résout

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2},$$

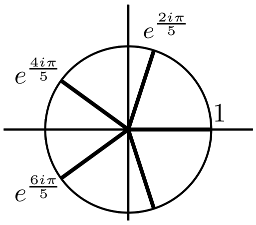
   et, comme $\frac{-5+\sqrt{5}}{2} < 0$, on obtient 2 racines :

$$\frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \pm i\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

   Les 5 racines de P sont donc

$$\boxed{1, \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\tfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4} - i\tfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \tfrac{-1-\sqrt{5}}{4} + i\tfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \tfrac{-1-\sqrt{5}}{4} - i\tfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.}$$

3. On trace les racines de P sur le cercle trigonométrique :



En précisant le signe des parties imaginaires et parties réelles, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}} &= \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\tfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\\
\mathrm{e}^{i\frac{8\pi}{5}} &= \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4} - i\tfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\\
\mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{5}} &= \tfrac{-1-\sqrt{5}}{4} + i\tfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\\
\mathrm{e}^{i\frac{6\pi}{5}} &= \tfrac{-1)\sqrt{5}}{4} - i\tfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}
\end{aligned}$$

Il en résulte par identification partie réelle et partie imaginaire

$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \qquad \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}}$$

et

$$\boxed{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \qquad \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.}$$

Puis comme $\frac{\pi}{5} = \pi - \frac{4\pi}{5}$, on en déduit

$$\boxed{\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.}$$

Exercice 3.

1. On a $D_n(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$.

$$\sum_{-n}^{n} e^{ikx} = \begin{cases} 2n+1 & \text{si } x \equiv 0[2\pi] \text{ (c'est-à-dire } e^{ix} = 1) \\ \dfrac{e^{-inx} - e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = \dfrac{e^{-i(n+\frac{1}{2})x} - e^{i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{-i\frac{1}{2}x} - e^{i\frac{1}{2}x}} = \dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)} & \text{si } x \not\equiv 0[2\pi] \text{ (c'est-à-dire } e^{ix} \neq 1) \end{cases}$$

On conclut donc

$$\boxed{D_n(x) = \begin{cases} 2n+1 & \text{si } x \equiv 0[2\pi] \\ \dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)} & \text{si } x \not\equiv 0[2\pi] \end{cases}.}$$

2. En utilisant la question précédente, on a

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2k+1 = (n+1)^2 & \text{si } x \equiv 0[2\pi] \text{ (c'est-à-dire } e^{ix} = 1) \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)} & \text{si } x \not\equiv 0[2\pi] \text{ (c'est-à-dire } e^{ix} \neq 1) \end{cases}$$

On a de plus, si $x \not\equiv 0[2\pi]$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin((k+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)} &= \frac{1}{\sin(\frac{1}{2}x)} \sum_{k=0}^{n} \sin((k+\frac{1}{2})x) \\
&= \frac{1}{\sin(\frac{1}{2}x)} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(e^{i(k+\frac{1}{2})x}) \\
&= \frac{1}{\sin(\frac{1}{2}x)} \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i(k+\frac{1}{2})x}\right) \\
&= \frac{1}{\sin(\frac{1}{2}x)} \mathrm{Im}\left(\frac{e^{i\frac{1}{2}x} - e^{i(\frac{3}{2}+n)x}}{1-e^{ix}}\right) \\
&= \frac{1}{\sin(\frac{1}{2}x)} \mathrm{Im}\left(e^{i(\frac{1}{2}+n)x} \frac{e^{-i(\frac{1}{2}+n)x} - e^{i(\frac{1}{2}+n)x}}{e^{-i\frac{1}{2}x} - e^{i\frac{1}{2}x}}\right) \\
&= \frac{1}{\sin(\frac{1}{2}x)} \mathrm{Im}\left(e^{i(\frac{1}{2}+n)x} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)}\right) \\
&= \frac{1}{\sin(\frac{1}{2}x)} \left(\sin((n+\frac{1}{2})x) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)}\right) \\
&= \left(\frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{F_n(x) = \left(\frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)}\right)^2 \text{ si } x \neq 0[2\pi],\ (n+1)^2 \text{ sinon.}}$$

3. Une suite :
   On fixe $m \in \mathbb{Z}$ et on définit la suite (u_n) par

$$u_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} F_n(x) \cos(mx) \mathrm{d}x.$$

   (a) Par symétrie de la somme, en utilisant les formules d'Euler, on a

$$\boxed{D_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) \text{ qui est réel pour tout } x.}$$

   (b) On a, en utilisant le formulaire trigonométrique,

$$\cos(at)\cos(bt) = \frac{1}{2}\left(\cos((a+b)t) + \cos((a-b)t)\right).$$

   On a

$$\int_0^{2\pi} \cos((a+b)t)\mathrm{d}t = \begin{cases} \left[\frac{\sin((a+b)t)}{a+b}\right]_0^{2\pi} = 0 & \text{si } a+b \neq 0 \\ [t]_0^{2\pi} = 2\pi & \text{si } a+b = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos((a-b)t)\mathrm{d}t = \begin{cases} \left[\frac{\sin((a-b)t)}{a-b}\right]_0^{2\pi} = 0 & \text{si } a-b \neq 0 \\ [t]_0^{2\pi} = 2\pi & \text{si } a-b = 0 \end{cases}$$

   Comme $a, b \in \mathbb{N}$, on conclut :

$$\boxed{I(a,b) = \begin{cases} 2\pi & \text{si } a = b = 0 \\ \pi & \text{si } a = b \neq 0 \\ 0 & \text{si } a \neq b. \end{cases}}$$

(c) On a utilisant la définition de F_n et la reformulation de $D_n(x)$

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} D_k(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(1 + 2\sum_{j=1}^{k} \cos(jx)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\cos(0x) + 2\sum_{j=1}^{k} \cos(jx)\right)
\end{aligned}$$

On a donc

$$\cos(mx)F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\cos(0x)\cos(mx) + 2\sum_{j=1}^{k} \cos(jx)\cos(mx)\right).$$

On en déduit

$$\int_0^{2\pi} F_n(x)\cos(mx)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \left(I(0,m) + 2\sum_{j=1}^{k} I(j,m)\right).$$

On distingue de 2 cas :

- $m = 0$ et l'expression de $I(a,b)$ permet de calculer

$$\int_0^{2\pi} F_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \left(I(0,0) + 2\sum_{j=1}^{k} I(j,m)\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(2\pi + 2\sum_{j=1}^{k} 0\right) = 2\pi(n+1).$$

- $m \neq 0$, seul les termes $I(m,j)$ avec $j = m$ sont non nuls et sont égaux à π. On les dénombre, il faut $k \geq m$ et pour chaque valeur de k convenant, le terme apparait 2 fois. Si $n < m$, il n'y a aucun terme convenant, sinon il y en a $n - m + 1$.
  On a donc

$$\int_0^{2\pi} F_n(x)\cos(mx)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } m > n \\ 2(n-m+1)\pi & \text{si } m \leq n \end{cases}.$$

  On

On conclut en divisant par πn

$$\boxed{u_n = \begin{cases} \frac{2(n+1)}{n} & \text{si } m = 0 \\ \frac{2(n-m+1)}{n} & \text{si } m \leq n \\ 0 & \text{si } m > n \end{cases}}$$

(d) Comme n tend vers $+\infty$ donc dépasse m, on conclut par un passage à la limite dans les 2 premières lignes de la conclusion de la question précédente

$$\boxed{\lim_n u_n = 2.}$$

Exercice 4.

1. (a) Sur $[0,\pi]$, $5 - 4\cos(x)$ est à valeurs dans $[1,9]$ (car $-1 \leq \cos(x) \leq 1$) et la fonction racine carrée est non nulle et dérivable sur cet intervalle. La fonction f est donc dérivable sur $[0,\pi]$ comme produit de fonctions dérivables et on a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\cos(x)\sqrt{5-4\cos(x)} - \sin(x)\frac{4\sin(x)}{2\sqrt{5-4\cos(x)}}}{5-4\cos(x)} \\
&= \frac{\cos(x)(5-4\cos(x)) - 2\sin^2(x)}{(5-4\cos(x))^{3/2}} \\
&= \frac{\cos(x)(5-4\cos(x)) - 2(1-\cos^2(x))}{(5-4\cos(x))^{3/2}} \\
&= \frac{-2\cos(x)^2 + 5\cos(x) - 2}{(5-4\cos(x))^{3/2}} = \frac{2(\cos(x)-\frac{1}{2})(-\cos(x)+2)}{(5-4\cos(x))^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Comme pour tout x, on a $(5-4\cos(x))^{\frac{3}{2}} > 0$ et $2-\cos(x) > 0$, on en déduit que $\boxed{\text{le signe de } f'(x) \text{ est celui de } \cos(x) - \frac{1}{2}}$

(b) On obtient le tableau de variations suivant pour f :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

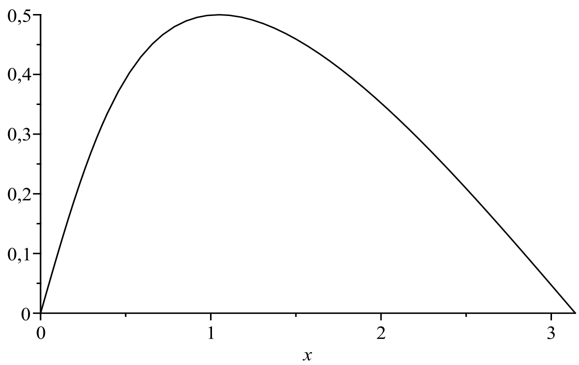


FIGURE 1 – Graphe de f

2. Soit g la fonction définie sur $[0,\pi]$ par

$$\forall x \in [0,\pi], \quad g(x) = \arccos\left(\frac{4-5\cos(x)}{5-4\cos(x)}\right)$$

(a) La fonction arccos est définie sur $[-1,1]$. Il faut donc vérifier $-1 \leq \frac{4-5\cos(x)}{5-4\cos(x)} \leq 1$. Comme $5-4\cos(x) > 0$, il suffit de vérifier $-(5-4\cos(x)) \leq 4-5\cos(x) \leq (5-4\cos(x))$. L'inégalité de gauche devient $\cos(x) \leq 1$ et celle de droite $-\cos(x) \leq 1$. Elles sont donc toutes deux vérifiées pour tout $x \in [0,\pi]$. Finalement $\boxed{g \text{ est bien définie sur } [0,\pi]}$

(b) Comme pour tout $y \in [-1,1]$, on a $\cos(\arccos(y)) = y$ et $\sin(\arccos(y)) = \sqrt{1-y^2}$. (On ira revoir le cours pour la démonstration.) On en déduit

$$\begin{aligned}
\cos(g(x)) &= \boxed{\frac{4-5\cos(x)}{5-4\cos(x)}} \\
\sin(g(x)) &= \sqrt{1-\left(\frac{4-5\cos(x)}{5-4\cos(x)}\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{9-9\cos^2(x)}}{5-4\cos(x)} \\
&= \frac{3\sqrt{1-\cos^2(x)}}{5-4\cos(x)}
\end{aligned}$$

Or $x \in [0,\pi]$, donc $\sin(x) \geq 0$ et il résulte $\sqrt{1-\cos^2(x)} = \sqrt{\sin^2(x)} = |\sin(x)| = \sin(x)$. D'où

$$\boxed{\sin(g(x)) = \frac{3\sin(x)}{5-4\cos(x)}}$$

(c) La fonction arccos est dérivable sur $]-1,1[$, donc g est dérivable par les règles de composition pour tout $x \in [0,\pi]$ tel que $\frac{4-5\cos(x)}{5-4\cos(x)} \neq \pm 1$.
C'est à dire $\cos(x) \neq \pm 1$, soit x différent de 0 ou π.
Comme $\cos(g(x)) = \frac{4-5\cos(x)}{5-4\cos(x)}$, par les règles de dérivation, on a

$$-\sin(g(x))g'(x) = \left(\frac{4-5\cos(x)}{5-4\cos(x)}\right)' = \frac{9\sin(x)}{(5-4\cos(x))^2}.$$

Il en résulte :

$$\boxed{g'(x)} = -\frac{9\sin(x)}{(5-4\cos(x))^2(\sin(g(x)))} = \boxed{-\frac{3}{(5-4\cos(x))}}$$

(d) On a, pour tout $x \in [0,\pi]$

$$\begin{aligned} g(g(x)) &= \arccos\left(\frac{4-5\cos(\arccos\left(\frac{4-5\cos(x)}{5-4\cos(x)}\right))}{5-4\cos(\arccos\left(\frac{4-5\cos(x)}{5-4\cos(x)}\right))}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{4-5\frac{4-5\cos(x)}{5-4\cos(x)})}{5-4\frac{4-5\cos(x)}{5-4\cos(x)})}\right) \qquad \text{grâce à } (b) \\ &= \arccos(\cos(x)) = x \qquad \text{car } x \in [0,\pi], \text{ et pour un tel } x, \arccos(\cos(x)) = x. \end{aligned}$$

On a donc prouvé que $\boxed{\text{pour tout } x \in [0,\pi],\ g(g(x)) = x}$

La fonction g est donc sa propre réciproque, donc
$\boxed{\text{la courbe } (\Gamma) \text{ de } g \text{ est symétrique par rapport à la droite } y = x \text{ dans un repère orthonormal}}$

(e) Grâce à cette indication, on construit :

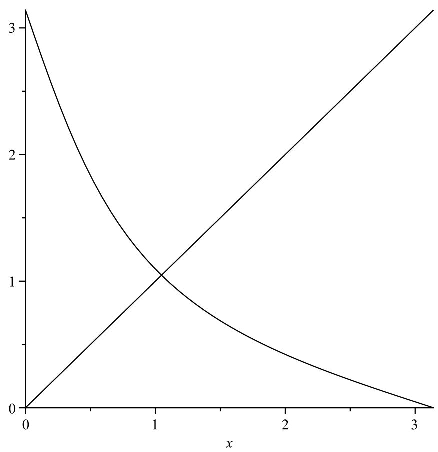


FIGURE 2 – Graphe de g

3. (a) La fonction f est continue strictement croissante sur $[0,\frac{\pi}{3}]$, donc bijective de $[0,\frac{\pi}{3}]$ sur $f([0,\frac{\pi}{3}]) = [0,\frac{1}{2}]$. La fonction f est continue strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{3},\pi]$, donc bijective de $[\frac{\pi}{3},\pi]$ sur $f([\frac{\pi}{3},\pi]) = [0,\frac{1}{2}]$. Donc pour un élément y de $[0,\frac{1}{2}]$, il existe un unique antécédent par f dans $[\frac{\pi}{3},\pi]$ et pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{3}]$, $f(x)$ est un élément de $[0,\frac{1}{2}]$. Donc si $x \in [0,\frac{\pi}{3}]$,
$\boxed{\text{il existe un unique antécédent } z \text{ à } f(x) \text{ dans } [\frac{\pi}{3},\pi] \text{ et } f(z) = f(x)}$

(b) Comme g est décroissante, si $x \leq \frac{\pi}{3}$, alors on a $g(x) \geq g(\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$.

On a de plus, grâce à $2(b)$:

$$\begin{aligned}
f(g(x)) &= \frac{\sin(g(x))}{\sqrt{5-4\cos(g(x))}} \\
&= \frac{3\sin(x)}{5-4\cos(x)} \frac{1}{\sqrt{5-4\frac{4-5\cos(x)}{5-4\cos(x)}}} \\
&= \frac{3\sin(x)}{5-4\cos(x)} \frac{\sqrt{5-4\cos(x)}}{\sqrt{5(5-4\cos(x))-4(4-5\cos(x))}} \\
&= \frac{3\sin(x)}{\sqrt{5-4\cos(x)}} \frac{1}{\sqrt{9}} \\
&= \frac{\sin(x)}{\sqrt{5-4\cos(x)}} = f(x)
\end{aligned}$$

On a bien pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$, $g(x) \geq \frac{\pi}{3}$ et $f(x) = f(g(x))$, donc $\boxed{z = g(x)}$