ACADEMIE DE VERSAILLES
LYCEE DE L'ESSOURIAU

UNIVERSITÉ PARIS SUD

Samedi 16 Septembre 2017 - 8h30-11h30

Duré : 3 heures

MATHÉMATIQUES
DEVOIR SURVEILLÉ N°1

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, d'une part vous le signalez au surveillant, d'autre part vous le signalez sur votre copie et vous poursuivez la composition en indiquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

L'usage de calculatrice est autorisé

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, **la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non encadrés et non-justifiés ne seront pas pris en compte.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 1 (sur le sujet)
NE SOYEZ PAS À COURT SUR LE COURS...

1. Écrire la définition d'une fonction périodique.

2. Écrire la définition d'une fonction croissante.

3. Soit u et g deux fonctions dérivables, rappeler les dérivées de $g \circ u$ et $\sqrt{u}$ sans se soucier de l'ensemble de dérivabilité.

4. Rappeler les dérivées de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et $g : x \mapsto \cos(x)$ en précisant l'intervalle de dérivabilité.

EXERCICE 2 (sur le sujet)
LA LOGIQUE DES MATHS...

1. Soit l'assertion : $\forall x > 0 \Rightarrow e^x \geqslant 1$.
Est-elle vraie ou fausse ? Écrire ensuite sa négation.

2. On note E l'ensemble des PCSI. On note B le sous-ensemble des Bretons de PCSI.
On va former des propositions logiques sur l'âge et l'amitié des éléments de E :
- si x et y sont deux élèves de E, on notera $x \leqslant y$ pour dire que x est plus jeune que y (ou y plus vieux que x).
- pour deux élèves x, y, on note $x \heartsuit y$ pour dire que x aime bien y. Et ce n'est pas forcément réciproque ! Si y n'aime pas x, alors on note $y \not\heartsuit x$.

(a) Traduire sous forme de proposition mathématique les phrases suivantes :
« Tous les bretons aiment quelqu'un. »

« Le plus âgé des élèves n'est pas breton. »

« Les amis de mes amis sont mes amis. »

(b) Traduire en français les propositions mathématiques suivantes.

$\exists x \in E, \forall y \in B, x \heartsuit y$

$\forall x, y \in E,\ (x \in B \text{ et } y \notin B) \Rightarrow (y \not\heartsuit x)$

EXERCICE 3

UN AIR DE DÉJÀ VU...

1. Calculer les dérivées des fonctions ci-dessous en précisant leur ensemble de définition.

a) $f(x) = \sqrt{3 - 2\sin x}$ b) $g(x) = x^2 e^{1-2x}$ c) $h(x) = \ln(1 - \ln x)$

2. Étudier la branche infinie en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 1}$ ainsi que la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote.

3. La fonction $g : x \mapsto \dfrac{2e^x}{1 + e^x}$ est-elle bornée sur $\mathbb{R}$?

4. Soit f une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$, montrer que $f(0) = 0$.

PROBLÈME

IL FAUT SAVOIR PRENDRE LA TANGENTE... HYPERBOLIQUE

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

PARTIE A - *Étude de f*

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f, puis étudier sa dérivabilité.

2. Étudier la parité de f. Peut-on réduire le domaine d'étude de f ?

3. Prouver que $\forall x \in D_f, f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \dfrac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}$.

4. Déterminer les limites aux bornes de D_f. Préciser les asymptotes éventuelles.

5. Dresser le tableau de variation complet de f sur D_f.

6. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

7. Déterminer étudier la position relative de T et $\mathcal{C}_f$.
On pourra étudier une fonction auxiliaire judicieusement choisie.

PARTIE B - *Étude de la fonction réciproque*

8. Justifier que f réalise une bijection de D_f dans un intervalle J à préciser.

On notera $g : J \mapsto D_f$ sa fonction réciproque. On notera $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.
On ne demande pas l'expression de $g(x)$.

9. Justifier que g est dérivable en 0 et préciser la valeur de $g'(0)$.

10. Dresser le tableau de variation complet de g sur J. Justifier.

11. Tracer, dans un même repère orthonormé, l'allure des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. On fera apparaître les résultats des questions précédentes.

PARTIE C - *Expression de la fonction réciproque*

On considère la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$.

12. Déterminer le domaine de définition D_h de h.

13. Soit $x \in D_f$. Justifier que $f(x)$ appartient à D_h puis montrer que $(h \circ f)(x) = x$.

14. Soit $x \in D_h$. Montrer que $(f \circ h)(x) = x$.

15. Que peut-on en déduire sur h ?

16. Vu ce que représente h, justifier comment le concepteur du sujet a trouvé cette expression.

La fonction f est en fait la fonction tangente hyperbolique (notée th) définie à la fin du chapitre 2.