# EXERCICE 1 (sur le sujet)

***NE SOYEZ PAS À COURT SUR LE COURS...***

**1.** Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$. La fonction $f$ est **périodique** lorsqu'il existe un réel $T > 0$ tel que :

$$\boxed{\forall x \in D_f,\ \text{ alors } x + T \in D_f \text{ et } f(x+T) = f(x)}$$

**2.** La fonction $f$ est dite <u>croissante sur $I$</u> lorsqu'elle conserve l'ordre :

$$\boxed{\forall (x,y) \in I^2,\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)}$$

**3.** Soit $u$ et $g$ deux fonctions dérivables telles que $u(D_u) \subset D_g)$ alors $\boxed{(g \circ u)' = u' \times g' \circ u.}$

Soit $u$ définie sur $I$ et strictement positive sur $I$ alors $\boxed{\sqrt{u}' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}.}$

**4.** Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) sur $D_=\mathbb{R}^*$, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\boxed{\forall \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}.}$

Soit $g : x \mapsto \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$, $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -\sin(x).}$

# EXERCICE 2 (sur le sujet)

**LA LOGIQUE DES MATHS...**

**1.** Soit l'assertion : $\forall x > 0 \Rightarrow e^x \geqslant 1$.

$\boxed{\text{Cette assertion est vraie par croissante de la fonction exp car } \forall x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Rightarrow e^x \geqslant 1.}$

(moins précis)

$\boxed{\text{La négation est } \exists x > 0 \Rightarrow e^x < 1.}$ (qui est bien entendu fausse !)

**2.** On note $E$ l'ensemble des PCSI. On note $B$ le sous-ensemble des Bretons de PCSI.
On va former des propositions logiques sur l'âge et l'amitié des éléments de $E$ :

— si $x$ et $y$ sont deux élèves de $E$, on notera $x \leqslant y$ pour dire que $x$ est plus jeune que $y$ (ou $y$ plus vieux que $x$).

— pour deux élèves $x$, $y$, on note $x \heartsuit y$ pour dire que $x$ aime bien $y$. Et ce n'est pas forcément réciproque ! Si $y$ n'aime pas $x$, alors on note $y \not\heartsuit x$.

(a) Traduire sous forme de proposition mathématique les phrases suivantes :

« Tous les bretons aiment quelqu'un. » : $\boxed{\forall x \in B, \exists y \in E, x \heartsuit y}$

« Le plus âgé des élèves n'est pas breton. » : $\boxed{\exists x \in E \backslash B, \forall y \in E, x \geqslant y}$

« Les amis de mes amis sont mes amis. » : $\boxed{\forall x, y, z \in E^3,\ (x \heartsuit y \text{ et } y \heartsuit z) \Rightarrow x \heartsuit z}$

(b) Traduire en français les propositions mathématiques suivantes.

$\exists x \in E, \forall y \in B, x \heartsuit y$ : $\boxed{\text{Il y a un élève qui aime tous les Bretons.}}$

$\forall x, y \in E,\ (x \in B \text{ et } y \notin B) \Rightarrow (y \not\heartsuit x)$ : $\boxed{\text{Les non-Bretons n'aiment pas les Bretons.}}$

# EXERCICE 3

***UN AIR DE DÉJÀ VU...***

**1.** a) $f(x) = \sqrt{3 - 2\sin x}$
$\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ donc $1 \leqslant 3 - 2\sin x \leqslant 5$, $f$ est donc définie sur $\mathbb{R}$, et comme $3 - 2\sin x$ se s'annule pas sur $\mathbb{R}$, $f$ est également dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée de fonctions dérivables et :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{-2\cos}{2\sqrt{3-2\sin x}} = \frac{-\cos}{\sqrt{3-2\sin x}}}$$

b) $g(x) = x^2 e^{1-2x}$
$g$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables et :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2xe^{1-2x} + x^2(-2e^{1-2x}) = 2x(1-x)e^{1-2x}}$$

c) $h(x) = \ln(1 - \ln x)$
$h$ est définie et dérivable si, et seulement si, $x > 0$ et $1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow x < e$ soit $D_h = ]0, e[$ et :

$$\boxed{\forall x \in ]0, e[,\ h'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{1 - \ln x} = \frac{1}{x(\ln x - 1)}}$$

**2.** Étudions la branche infinie en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 1}$. Remarquons que $D_f = \mathbb{R}$.
*On rappelle que la limite en $\pm\infty$ d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.*

- $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{2x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 1} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{2x^3}{x^2} = \lim\limits_{+\infty} 2x = +\infty$ donc pas d'asymptote horizontale.
- On calcule $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{2x^3 - x^2 + 1}{x^3 + x} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{2x^3}{x^3} = \lim\limits_{+\infty} 2$, posons $a = 2$.
- $g(x) - 2x = \dfrac{2x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 1} - 2x = \dfrac{2x^3 - x^2 + 1 - 2x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \dfrac{-x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$.

$\lim\limits_{+\infty} \dfrac{-x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{-x^2}{x^2} = -1$ et on pose $b = -1$.

$\boxed{\text{On en déduit que la droite } \Delta : y = 2x - 1 \text{ est asymptote oblique à la courbe en } +\infty.}$

Étudions la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote $\Delta$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$d(x) = f(x) - (2x - 1) = f(x) - 2x + 1 = \frac{-x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} + 1 = \frac{-x^2 - 2x + 1 + x^2 + 1}{x^2 + 1} = \frac{2(1 - x)}{x^2 + 1}$$

$d(x)$ est du signe de $1 - x$ vu que $1 + x^2 > 0$ donc :

— $\boxed{\text{La courbe est au-dessus de son asymptote sur } ]-\infty, 1[ \ (d(x) > 0).}$

— $\boxed{\text{La courbe est au-dessus de son asymptote sur } ]1, +\infty[ \ (d(x) < 0).}$

**3.** La fonction $g : x \mapsto \dfrac{2e^x}{1 + e^x}$ est-elle bornée sur $\mathbb{R}$ ?
Il est possible de faire le tableau de variation complet de la fonction $g$ mais le plus simple reste quand même d'observer que comme $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ alors $g(x) \geqslant 0$ mais aussi $1 + e^x \leqslant e^x$ soit $g(x) \leqslant 1$.

$\boxed{\text{Finalement } g \text{ est bornée car } \forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant g(x) \leqslant 1.}$

**4.** Soit $f$ une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.

$\boxed{\text{En posant } x = 0 \text{ on obtient } f(-0) = -f(0) \text{ soit } 2f(0) = 0 \text{ et donc } f(0) = 0.}$

# PROBLÈME

***IL FAUT SAVOIR PRENDRE LA TANGENTE... HYPERBOLIQUE***

**On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.**

## PARTIE A - *Étude de $f$*

1. **Déterminer le domaine de définition $D_f$ de $f$, puis étudier sa dérivabilité.**
$\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ car le dénominateur de la fraction définissant } f \text{ ne s'annule jamais}}$, en effet $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$.
$x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc par somme et quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (dont ne dénominateur ne s'annule pas), $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned}
\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)} &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\
&= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} \\
&= \frac{e^{2x} + 2e^x.e^{-x} + e^{-2x} - (e^{2x} - 2e^x.e^{-x} + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\
&= \boxed{\frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}}
\end{aligned}$$

2. **Étudier la parité de $f$. Peut-on réduire le domaine d'étude de $f$ ?**
Le domaine de définition est $\mathbb{R}$, qui est centré par rapport à 0.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{e^{-x} + e^{-(-x)}} = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -f(x)}$$

On en déduit que la fonction $f$ est impaire. On peut alors réduire le domaine d'étude à l'intervalle $[0, +\infty[$ et l'on complètera le tracé de la courbe représentative de $f$ par symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3. **Prouver que** $\forall x \in D_f, f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \frac{\frac{(e^x)^2 - 1}{e^x}}{\frac{(e^x)^2 + 1}{e^x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}}$$

On peur factoriser par $e^{2x}$ au numérateur et dénominateur pour retrouver l'autre égalité ou bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} = \frac{\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x}}}{\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x}}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = f(x)}$$

4. **Déterminer les limites aux bornes de $D_f$. Préciser les asymptotes éventuelles.**
$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \dfrac{1 - 0}{1 + 0} = 1}$ vu que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$.
$\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \dfrac{0 - 1}{1 + 0} = 1}$ vu que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$.
$\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$ et asymptote horizontale d'équation $y = -1$ en $-\infty$.

5. **Dresser le tableau de variation complet de $f$ sur $D_f$.**
D'après les questions **1.** et **4.** on a tout ce qu'il faut pour faire le tableau de variations complet de $f$ !
En effet $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ donc donc :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | $+$ | | |
| $f$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ |

6. **Déterminer une équation de la tangente $T$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $0$.**
$\boxed{\text{La tangente } T \text{ a pour équation } y = f'(0)(x-0) + f(0) \text{ avec } f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = \frac{4}{(1+1)^2} = 1 \text{ soit } T : y = x.}$

7. **Déterminer étudier la position relative de $T$ et $\mathcal{C}_f$.**
Pour cela il faut étudier le signe de la différence :

$$f(x) - x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - x = \frac{e^x - e^{-x} - x(e^x + e^{-x})}{e^x + e^{-x}}$$

Le signe du numérateur n'est pas évident, on va donc définir une fonction $\varphi$ auxiliaire associée pour étudier ses variations : $\varphi(x) = e^x - e^{-x} - x(e^x + e^{-x})$.
$\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions dérivables et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = e^x + e^{-x} - 1(e^x + e^{-x}) - x(e^x - e^{-x}) = x(e^x - e^{-x})$$

On $e^x - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$.
$(e^x - e^{-x})$ est du même signe que $x$ donc le produit $\varphi'(0)$ est toujours positif, d'où le tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'(x)$ | | | $+$ | | |
| $\varphi$ | | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

Vu que le dénominateur est toujours positif, on en déduit que $f(x) - x > 0$ sur $\mathbb{R}^+$ et $f(x) - x < 0$ sur $\mathbb{R}^-$.
$\boxed{\text{Ainsi } T \text{ est en-dessous de } \mathcal{C}_f \text{ sur } \mathbb{R}^- \text{ et } T \text{ est au-dessus de } \mathcal{C}_f \text{ sur } \mathbb{R}^+.}$

## PARTIE B - *Étude de la fonction réciproque*

**8. Justifier que $f$ réalise une bijection de $D_f$ dans un intervalle $J$ à préciser.**

$f$ étant strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :

$\boxed{f \text{ est une bijection de } \mathbb{R} \text{ vers } f(\mathbb{R}) = ]-1,1[}$ d'après le tableau de variations de $f$.

**On notera $g : J \mapsto D_f$ sa fonction réciproque. On notera $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.**
***On ne demande pas l'expression de $g(x)$.***

**9. Justifier que $g$ est dérivable en 0 et préciser la valeur de $g'(0)$.**

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ donc ne s'annule pas, ainsi d'après le cours sa bijection réciproque $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et particulièrement en 0. On a :

$$g'(0) = (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

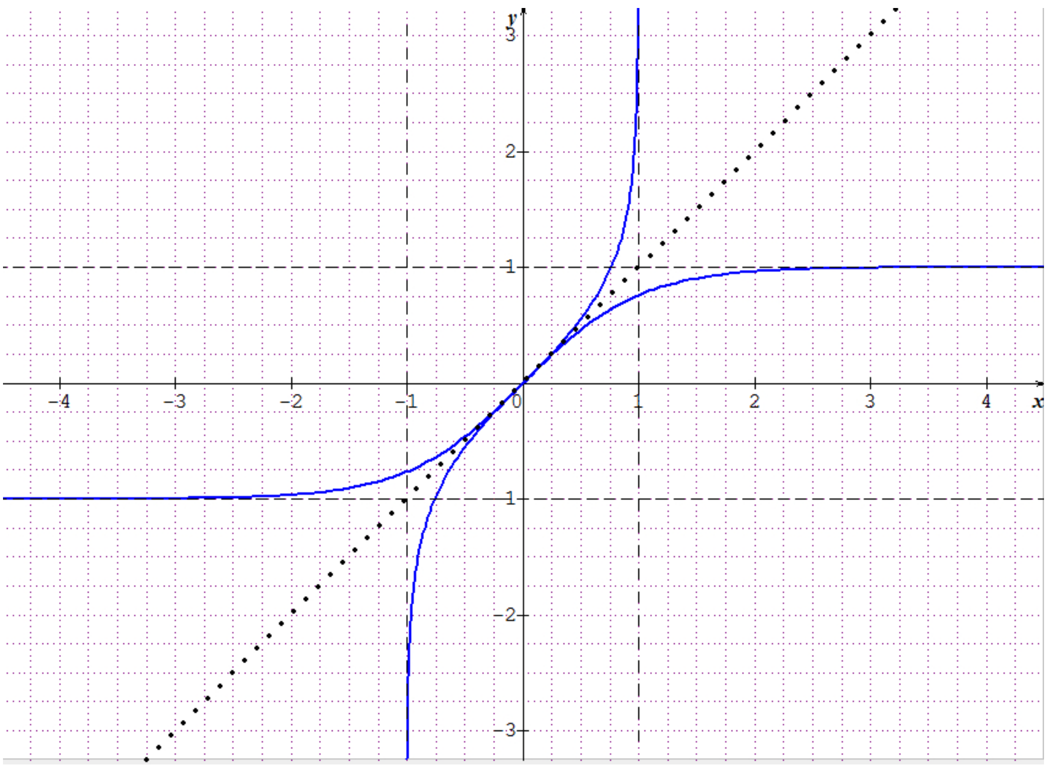
**10. Dresser le tableau de variation complet de $g$ sur $J$. Justifier.**

Toujours d'après le cours, $\boxed{f \text{ et } g \text{ ont le même sens de variation sur } \mathbb{R}}$ (*il suffit sinon d'observer que les dérivées sont de même signe vu la formule les liant*) ainsi $g$ est croissante sur $]-1,1[$.

$\boxed{\text{De plus } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 \Leftrightarrow \lim_{x\to-1} g(x) = -\infty}$ d'où :

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | \|\| | | $+$ | | \|\| |
| $g$ | \|\| $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ \|\| |

**11. Tracer, dans un même repère orthonormé, l'allure des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. On fera apparaître les résultats des questions précédentes.**



## PARTIE C - *Expression de la fonction réciproque*

**On considère la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.**

**12. Déterminer le domaine de définition $D_h$ de $h$.**

$\boxed{h \text{ est définie si, et seulement si, } \dfrac{1+x}{1-x} > 0}$ , un rapide tableau de signe de cette quantité montre que $\boxed{D_h = ]-1,1[}$.

| $x$ | $-\infty$ | | -1 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1+x$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $1-x$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $\dfrac{1+x}{1-x}$ | | $-$ | 0 | $+$ | $\Vert$ | $-$ | |

**13. Soit $x \in D_f$. Justifier que $f(x)$ appartient à $D_h$ puis montrer que $(h \circ f)(x) = x$.**

$\boxed{\text{D'après le tableau de variation obtenu à la question } \mathbf{5.} \text{ il est trivial de voir que } f(x) \in ]-1,1[= D_h.}$

$$\begin{aligned}
\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ (h \circ f)(x)} &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}{1-\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{e^{2x}+1+e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}{\frac{e^{2x}+1-(e^{2x}-1)}{e^{2x}+1}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2e^{2x}}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}\right)\\
&= \boxed{x}
\end{aligned}$$

**14. Soit $x \in D_h$. Montrer que $(f \circ h)(x) = x$.**

$$\begin{aligned}
\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ (f \circ h)(x)} &= \frac{e^{2h(x)}-1}{e^{2h(x)}+1}\\
&= \frac{\frac{1+x}{1-x}-1}{\frac{1+x}{1-x}+1} \quad \text{car } e^{2h(x)} = \frac{1+x}{1-x}\\
&= \frac{\frac{1+x-1+x}{1-x}}{\frac{1+x+1-x}{1-x}}\\
&= \frac{2x}{x}\\
&= \boxed{x}
\end{aligned}$$

**15. Que peut-on en déduire sur $h$ ?**

$\boxed{\text{On en déduit bien entendu que } h \text{ est la bijection réciproque de } f \text{ , c'est à dire } h = g\,!}$

**16. Vu ce que représente $h$, justifier comment le concepteur du sujet a trouvé cette expression.**
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in ]-1,1[$ alors

$$\begin{aligned}
\boxed{y = f(x)} \quad &\Leftrightarrow \quad y = \frac{e^{2h(x)}-1}{e^{2h(x)}+1} \\
&\Leftrightarrow \quad y(e^{2x}-1) = e^{2x}+1 \\
&\Leftrightarrow \quad (y-1)e^{2x} = y+1 \\
&\Leftrightarrow \quad e^{2x} = \frac{y+1}{y-1} \quad \text{car } y \neq 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x = \ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right) \quad \text{car } y \in ]-1,1[ \text{ et } \ln \text{ est bijective sur } \mathbb{R}_+^* \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } f^{-1} : y \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right) \text{ et on retrouve bien l'expression de } h \text{ proposée.}}$$