EXERCICE 1 :

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{1\}$, et $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

1. $f = uvw$ avec $u : x \mapsto x$, $v : x \mapsto (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ et $w : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$. En utilisant les $DL_2(0)$ des fonctions usuelles présentes dans f, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} (1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\ \dfrac{x}{x-1} = -x - x^2 + o(x^2) \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} (produit) \\ f(x) = -x - x^2 + o(x^2) \end{array}\right.$$

Ainsi la tangente T_0 à $\mathcal{C}_f$ en 0 a pour équation $y = -x$ et la courbe de f est au-dessous de cette droite. (en effet $f(x) - (-x) = -x^2 + o(x^2)$ et $-x^2 \leqslant 0$)

2. Pour étudier le comportement de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$, après avoir remarqué que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x$, on effectue un $DL_2(0)$ de $\dfrac{f(x)}{x}$ au voisinage de $+\infty$.

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}}$$

On pose $t = \dfrac{1}{x}$ et $t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, puis $f(x)/x = tf(1/t) = g(t)$.

$g(t) = \dfrac{\sqrt{1+t^2}}{1-t} = \left(1 + \dfrac{1}{2}t^2\right)(1+t+t^2) + o(t^2) = 1 + t + \dfrac{3}{2}t^2 + o(t^2)$

Il s'en suit que $\dfrac{f(x)}{x} = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{2x^2} + \underset{+\infty}{0}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $f(x) = x + 1 + \dfrac{3}{2x} + \underset{+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

La droite d'équation cartésienne $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisisnage de $+\infty$ et la courbe est située au-dessus de son asymptote. (en effet $f(x) - (x+1) = \dfrac{3}{2x} + \underset{+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$)

EXERCICE 2 :

$DL_{10}(0)$ de $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t$, $x \in \mathbb{R}$:

Soit $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ et $G : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ la primitive de g qui s'annule en 0.

Compte-tenu des notations, $F'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$.

Pour x voisin de 0, $g(x) = 1 - \dfrac{x^4}{2} + 3\dfrac{x^8}{8} + o(x^9)$, ce qui permet d'écrire que :

$$F'(x) = -1 + 2x + \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{8}x^8 - x^9 + o(x^9)$$

On intégre ($F(0) = 0$) et l'on obtient : $F(x) = -x + x^2 + \dfrac{1}{10}x^5 - \dfrac{1}{24}x^9 - \dfrac{1}{10}x^{10} + o(x^{10})$.

EXERCICE 3 :

$\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}\right)$?

$\dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{(x - \sin(x)(x + \sin(x))}{x^2\sin^2(x)} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{\frac{x^3}{6} \times 2x}{x^4} = \dfrac{1}{3}$

La limite vaut donc $\dfrac{1}{3}$.

EXERCICE 4 :

Calculer le développement limité à l'ordre n en a de :

Fonction	n	a	Réponse	Indication
$\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+x}}$	3	0	$1+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{8}x^2-\dfrac{1}{48}x^3+o(x^3)$	
$\ln^2(1+x)$	4	0	$x^2-x^3+\dfrac{11}{12}x^4+o(x^4)$	
$\dfrac{1}{\cos(x)}$	7	0	$1+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{5}{24}x^4+\dfrac{61}{720}x^6+o(x^7)$	
$\tan(x)$	5	0	$x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{15}x^5+o(x^5)$	$\tan(x)=\sin(x)\times\dfrac{1}{\cos(x)}$
$\ln(\cos(x))$	6	0	$-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{12}x^4-\dfrac{1}{45}x^6+o(x^6)$	$\ln(\cos(x))=\ln(1-(1-\cos(x)))$ ou $(x\mapsto\ln(\cos(x)))'=-\tan(x)$
$\ln(2\cos(x)+\sin(x))$	4	0	$\ln(2)+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{8}x^2+\dfrac{5}{24}x^3-\dfrac{35}{192}x^4+o(x^4)$	
$\mathrm{e}^{\sqrt{1+x}}$	3	0	$\mathrm{e}+\dfrac{\mathrm{e}}{2}x+\dfrac{\mathrm{e}}{48}x^3+o(x^3)$	

EXERCICE 5 :

Branches infinies de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction $f(x)=x\arctan\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

Remarquons que $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=-\dfrac{\pi}{2}$.

On a également $f(x)\underset{\pm\infty}{\sim}\dfrac{\pi x}{4}$. En posant $x=\dfrac{1}{u}$, on obtient $f(x)=f\left(\dfrac{1}{u}\right)=\dfrac{1}{u}\arctan\left(\dfrac{1}{1-u}\right)\dfrac{1}{u}g(u)$.

$g'(u)=\dfrac{1}{2-2u+u^2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1-(u-\frac{u^2}{2})}=\dfrac{1}{2}(1+u+o(u))$, ce qui permet d'obtenir, compte-tenu de $g(0)=\dfrac{\pi}{4}$, $g(u)=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{u}{2}+\dfrac{u^2}{4}+o(u^2)$, et

$$f\left(\frac{1}{u}\right)=\frac{\pi}{4u}+\frac{1}{2}+\frac{u}{4}+o(u)$$

c'est à dire, $f(x)=\dfrac{\pi}{4}x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ au voisisnage de $+\infty$ et de $-\infty$.

La droite d'équation $y=\dfrac{\pi}{4}x+\dfrac{1}{2}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$. La courbe est au-dessus de cette droite au voisinage de $+\infty$, et en dessous au voisinage de $-\infty$.

EXERCICE 6 :

Prouver que la fonction $g : x\longmapsto\dfrac{1-\cos(x)}{\tan^2(x)}$ définie au voisinage de 0 (sauf en 0) peut être prolongée par continuité en 0, et que la fonction ainsi prolongée (notée g) admet un $DL_3(0)$ qu'on calculera.

- $1-\cos(x)\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{x^2}{2}$ et $\tan^2(x)\underset{x\to0}{\sim}x^2$, on a donc $g(x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}\dfrac{1}{2}$; on prolonge g en posant $g(0)=\dfrac{1}{2}$.
- $1-\cos(x)$ et $\tan^2(x)$ ont des $DL(0)$ dont le premier terme dans la partie régulière est en x^2, on va donc former un $DL_5(0)$ de $1-\cos(x)$ et de $\tan^2(x)$.
  ▷ $1-\cos(x)=1-\left(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^5)\right)=x^2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{x^2}{24}+o(x^3)\right)$

▷ On sait que $\tan(x) = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^5)$ et comme $1 + \tan^2(x) = \tan'(x) = 1 + x^2 + \dfrac{2}{3}x^4 + o(x^5)$ et donc $\tan^2(x) = x^2\left(1 + \dfrac{2}{3}x^2 + o(x^3)\right)$

$$\text{Ainsi : } g(x) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + o(x^3)}{1 + \frac{2}{3}x^2 + o(x^3)} = \frac{1}{2} - \frac{3}{8}x^2 + o(x^3).$$