Notion de dérivée

Exercice 1 *Si f est dérivable et paire (ou impaire), que dire de la parité de f' ?*

Exercice 2 *Soit $f(x) = \left|x^3(x-2)\right|$, étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 3 *Déterminer a et b réels pour que la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ si $0 \le x \le 1$ et $f(x) = ax^2 + bx + 1$ si $x > 1$ soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.*

Exercice 4 *Soit $f(x) = x^x$, peut on prolonger f sur $\mathbb{R}_+$, le prolongement est-il dérivable sur $\mathbb{R}_+$?*

Exercice 5 *Etudier la continuité, la dérivabilité et le caractère C^1 de la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.*

Exercice 6 *Etudier la dérivabilité de $f(x) = \sin x \sin\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.*

Exercice 7 *Calculer les dérivées suivantes (donner le domaine de définition de la dérivée):*

$$① \sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} \qquad ② \frac{2\,\mathrm{sh}(x)+3}{\mathrm{sh}(x)-1} \qquad ③ \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\right)$$

$$④ \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} \qquad ⑤ \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right) \qquad ⑥ \sqrt{\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}}$$

$$⑦ \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}-1} \qquad ⑧ \frac{x\ln|x|}{x-1} \qquad ⑨ x^2\ln\left(\frac{x+a}{x}\right)$$

Exercice 8 *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, on définit f par $f(x) = P\left(\dfrac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}}$, montrer que $f'(x) = Q\left(\dfrac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}}$ où $Q \in \mathbb{R}[X]$. Quelle relation existe-t-il entre P et Q ?*

Exercice 9 *Soit f dérivable en a, calculer $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f^2(a+3h)-f^2(a-h)}{h}$.*

Exercice 10 *Trouver toutes les fonctions dérivables en 0 et telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$.*

Exercice 11 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f(x) = (1+e^x)^n$, calculer de deux manières $f'(1)$ et en déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.*

Dérivées énièmes

Exercice 12 *Soit $f(x) = \cos x$ et $g(x) = \sin x$, montrer que $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ et que $g^{(n)}x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.*

Exercice 13 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, Calculer les dérivées énièmes de*

$$① (x-\alpha)^k \text{ où } k \in \mathbb{N} \qquad ② \frac{1}{x-\alpha} \qquad ③ \ln|x+\alpha|$$

puis en déduire celles de

$$④ \frac{1-x}{1+x} \qquad ⑤ \ln\left|1-x^2\right| \qquad ⑥ \frac{1}{(x-a)(x-b)} \text{ où } a \neq b$$

Exercice 14 *Calculer la dérivée énième de*

$$① \sin^2 x \qquad ② \cos(x)e^x \qquad ③ x^{n-1}\ln(x)$$

Exercice 15 *Calculer les dérivées énièmes de*

$$① (x^3+2x-7)e^x \qquad ② x^2(1+x)^n \qquad ③ \frac{e^x}{1+x}$$

Exercice 16 *Trouver a et b tels que* $\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{a}{x+i}+\dfrac{b}{x-i}$. *En déduire la dérivée énième de* $\arctan x$ *et préciser les valeurs qui l'annulent.*

Exercice 17 *On considère la fonction* $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, *cette fonction est clairement de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$.

1. *Montrer par récurrence qu'il existe un polynôme $P_n(X)$ tel que,*
$$\forall x\in\mathbb{R},\ f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$
et que
$$P_{n+1}(x)=\left(1+x^2\right)P_n'(x)-2(n+1)\,x\,P_n(x)$$
2. *En dérivant f, on constate que* $\forall x\in\mathbb{R},\ \left(1+x^2\right)f'(x)+2xf(x)=0$. *En utilisant la formule de Leibniz sur cette égalité que l'on dérivera n fois, établir que*
$$P_{n+1}(x)+2(n+1)\,x\,P_n(x)+n(n+1)\left(1+x^2\right)P_{n-1}(x)=0$$
En déduire que
$$P_n'(x)=-n(n+1)\ P_{n-1}(x)$$

Exercice 18 *Soit* $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, *$f$ est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$, *Montrer que* $f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$ *où P_n est un polynôme. Donner une relation de récurrence entre P_{n+1},P_n et $P_n^{'}$ puis entre P_{n+1},P_n et P_{n-1}. Préciser $P_n(0)$ et montrer que* $P_n^{'}=-n^2P_{n-1}$.

Exercice 19 *Soit* $f(x)=\tan x$, *à l'aide la relation* $f'=1+f^2$ *et de la formule de Leibniz, déterminer un algorithme de calcul de* $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Exercice 20 *On suppose connu l'existence (et l'unicité) d'un polynôme T_n tel que* $\forall\theta\in\mathbb{R},\ T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$. *Montrer que T_n est solution de l'équation différentielle*
$$\left(x^2-1\right)y''+xy'=n^2y$$

Rolle-TAF

Exercice 21 *A l'aide des accroissements finis, montrer que :*

1. $\forall x\in\,]0,+\infty[,\ \dfrac{x}{x+1}\leq\ln(1+x)\leq x$, *en déduire que l'inégalité est encore vraie sur* $]-1,+\infty[$.
2. $\forall x>0,\ \dfrac{x}{1+x^2}<\arctan(x)<x$

Exercice 22 *A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que :*

1. $\forall x\in\,]0,+\infty[,\ \dfrac{1}{x+1}\leq\ln(x+1)-\ln(x)\leq\dfrac{1}{x}$.
2. *Soit k un entier fixé, $k\geq 2$, déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de* $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{kn}\frac{1}{p}$.

Exercice 23 *Soit f continue sur $[a,b]$, on pose* $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, *à l'aide de F, montrer qu'il existe* $c\in\,]a,b[$ *tel que* $m(f)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt=f(c)$.

Exercice 24 *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, de classe C^2 sur $[a,b]$ et 3 fois dérivables sur $]a,b[$. On désire montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que*

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{2}\left(f'(a)+f'(b)\right)-\frac{(b-a)^3}{12}f^{(3)}(c)$$

On pose $\phi(t)=f(t)-f(a)-\dfrac{t-a}{2}\left(f'(a)+f'(t)\right)+\dfrac{(t-a)^3}{12}K$ où K est tel que $\phi(a)=\phi(b)$.

1. *Calculer $\phi(a)$ et $\phi'(a)$ (après avoir justifié que ϕ est dérivable).*
2. *A l'aide du théorème de Rolle, conclure.*

Exercice 25 *Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a)=f(b)=0$. Soit $\alpha\notin[a,b]$, montrer qu'il existe $d\in]a,b[$ tel que la tangente en d à la courbe représentative de f passe par $M(\alpha,0)$.*

Exercice 26 *Soit $n\geq 3$, montrer que le polynôme $P(x)=x^n+ax+b$ où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ admet au plus trois racines réelles distinctes.*

Exercice 27 *Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, de classe C^{n-2} sur $[a,b]$ et dérivable $n-1$ fois sur $]a,b[$, montrer que si f a n zéros sur $[a,b]$ alors $\exists c\in]a,b[\ ,\ f^{(n-1)}(c)=0$.*

Exercice 28 *Soit f continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$ telle que $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}f(a)$. Prouver qu'il existe $c\in]a,+\infty[$ tel que $f'(c)=0$ (on pourra poser pour $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $g(x)=f(a+\tan x)$ et prolonger g).*

Exercice 29 *Résoudre l'équation*

$$5^x+2^x=4^x+3^x$$

où $x\in\mathbb{R}_+^*$.

Application aux suites $u_{n+1}=f(u_n)$

Exercice 30 *On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=\cos(u_n)$.*

1. *Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\in[0,1]$.*
2. *Justifier que la fonction $\cos$ est lipschtzienne sur $[0,1]$ et que l'équation $\cos x=x$ a une unique solution ℓ dans $[0,1]$.*
3. *Montrer que $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell$.*

Exercice 31 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0>0$ et $u_{n+1}=\dfrac{1}{1+u_n^2}$.*

1. *Soit f définie par $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, déterminer $\sup\limits_{[0,+\infty[}|f'(x)|$. Que peut-on en déduire pour f ?*
2. *Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution ℓ positive.*
3. *En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exercice 32 *On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0\in\left[0,\frac{4}{3}\right]$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\frac{1}{3}\left(4-u_n^2\right)$. Justifier rapidement que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in\left[0,\frac{4}{3}\right]$. Montrer que $(u_n)_n$ converge vers 1.*

Exercice 33 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=\cos\left(\cos^2(u_n)\right)$.*

1. *Montrer que $u_n\in[0,1]$.*
2. *Soit f définie par $f(x)=\cos\left(\cos^2(x)\right)$, déterminer un majorant simple de $|f'(x)|$ sur $[0,1]$, que peut-on en déduire pour f ?*
3. *Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution ℓ positive. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.*

Exercice 34 *(CCP PC 2009) Soit f définie par $f(x)=1+\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}^*$.*

1. *Montrer que* $\forall x > 0,\ \dfrac{1}{2} \leq f(x) \leq \dfrac{3}{2}$*, que* $f(f(x)) > 1$ *et que* f *est* $\frac{1}{2}$*−lipschitzienne sur* $[1, +\infty[$.
2. *Montrer qu'il existe un unique* $\ell > 1$ *tel que* $f(\ell) = \ell$.
3. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 = a > 0$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$. *Justifier que pour* $n \geq 2$, u_n *existe et* $u_n \geq 1$ *puis montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ.

Exercice 35 *On considère la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 = 0$ *et* $u_{n+1} = 1 + \cos\left(\dfrac{u_n}{3}\right)$. *On pose* $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{3}\right) + 1$.

1. *Montrer que l'équation* $f(x) = x$ *admet une unique solution* α. *Préciser* $\lfloor \alpha \rfloor$.
2. *Déterminer* $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$. *En déduire que* $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{3^n}$. *A partir de quel rang est-on est sûr que* u_n *est une valeur approchée de* α *à* 10^{-5} *près ?*

Théorème limite de la dérivée

Exercice 36 *La fonction* f *définie par* $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ *est-elle dérivable en* $x = 0$ *? Si oui, est-elle de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0, +\infty[$ *?*

Exercice 37 *Soit* f *définie par* $f(x) = \arctan\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$ *et* $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$, f *est-elle* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 38 *Soit* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \dfrac{\sin x}{\operatorname{sh} x}$ *si* $x \neq 0$ *et* $f(0) = 1$, *montrer que* f *est* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 39 *Soit* f *définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par* $f(x) = \dfrac{x^2 e^x}{4}(2\ln|x| - 3)$. *Montrer que l'on peut prolonger* f *en une fonction* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 40 *Soit* f *définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par* $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\operatorname{sh}(x^2)}{2x^2} & \text{si } x < 0 \\ \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$. *Justifier que* f *se prolonge en une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$. *Montrer que* f *est solution de l'équation différentielle* $|x|\, y' + 2\left(x^2 - 1\right) y = e^{-x^2}$ *sur* $\mathbb{R}$ *en entier.*

Exercice 41 *On pose, pour* t *réel* $h(t) = \dfrac{t^2}{2\pi} - t$ *et on définit la fonction* φ *sur* $[0, \pi]$ *par :*

$$\varphi(0) = -1 \quad \text{et} \quad \varphi(t) = \frac{h(t)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \text{ pour } t \in \left]0, \pi\right].$$

Montrer que la fonction φ *est de classe* C^1 *sur l'intervalle* $[0, \pi]$.