EXERCICE 1 :

1. Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. Prouver que $\forall u \in E$, $0.u = 0_E$.
2. Prouver que si F est un sous-espace vectoriel de E alors $0_E \in F$.
3. Soit $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\}$.Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
4. Soit $G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\right\}$. Prouver que G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE 2 :

Soit E l'espace vectoriel des aplications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (on note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$).

1. Prouver que $E_1 = \{f \in E : f \text{ bornée}\}$ est un sosu-espace vectoriel de E.
2. Soit $E_2 = \{f \in E : f \text{ décroissante}\}$. E_2 est-il un sous-espace vectoriel de E ?

EXERCICE 3 :

Soit $F = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_2 = \overline{z_1}\right\}$.

1. Donner des éléments de F. $0_{\mathbb{C}^2}$ appartient-il à F ?
2. F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^2$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel ? Qu'en est-il si $\mathbb{C}^2$ est considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

EXERCICE 4 :

Soit $f : [0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall x \in [0, 1[$, $f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{1 - x}\right)$.

1. Calculez pour tout entier naturel l'image par f de $x_n = 1 - \dfrac{2}{(4n + 1)\pi}$ et de $y_n = 1 - \dfrac{2}{(4n + 3)\pi}$.
2. On souhaite déterminer $f([-1, 1[)$.
   (a) Prouver que $\forall x \in [0, 1[$, $|f(x)| < 1$. Qu'en déduit-on pour $f([0, 1[)$?
   (b) Citer le théorème des valeurs intermédiaires. Déterminer $f([0, 1[)$.

EXERCICE 5 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de période T. On suppose que f admet $L \in \mathbb{R}$ pour limite en $+\infty$. L'objectif de l'exercice est de prouver que f est constante.

1. Donner la définition quantifiée de $f(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} L$ (symboles clés : ϵ, A).
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Comment peut-on choisir n pour que $x + nT > A$? (le A de la définition)
3. En déduire que $f(x) = L$, pour tout x réel.

EXERCICE 6 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 qui vérifie $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = f(x)$.
2. Prouver que f est constante.

EXERCICE 7 :

Déterminer le domaine de définition et de continuité de la fonction f en précisant le comportement aux bornes.

$$f(x) = \exp\left(\frac{\ln(x)}{\ln(x) - 1}\right)$$

EXERCICE 8 :

Étudier la limite suivante

$$\lim_{x \to \pi/3} \frac{\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x)}{x - \pi/3}$$

EXERCICE 9 :

Étudier la limite suivante

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2 - x^2} - 1}{\ln(x)}$$

EXERCICE 10 :

Étudier la limite suivante

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3}$$