COMPARAISON DE FONCTIONS - DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Notion de voisinage

- Si a est un réel : on appelle **voisinage de** a tout ensemble de la forme $]a-h, a+h[$, avec $h > 0$, ou contenant un intervalle de cette forme.
- Si $a = +\infty$: on appelle **voisinage de** $+\infty$ tout ensemble de la forme $[B, +\infty[$, avec $B \in \mathbb{R}$, ou contenant un intervalle de cette forme.
- Si $a = -\infty$: on appelle **voisinage de** $-\infty$ tout ensemble de la forme $]-\infty, B]$, avec $B \in \mathbb{R}$, ou contenant un intervalle de cette forme.

Définition : on dit qu'une propriété portant sur une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est «vraie au voisinage de a» si elle est vraie sur l'intersection de I avec un voisinage de a, autrement dit si cette propriété est vérifiée sur un $I \cap]a-h, a+h[$ (si $a \in \mathbb{R}$) ou sur un $I \cap [B, +\infty[$ (si $a = +\infty$) ou sur un $I \cap]-\infty, B]$ (si $a = -\infty$).
Exemples : la fonction sin est croissante au voisinage de 0, positive au voisinage de $\frac{\pi}{4}$.
La fonction exp est majorée par $\frac{1}{2}$ au voisinage de $-\infty$, et minorée par 100 au voisinage de $+\infty$.
On a $\sqrt{x} \leqslant x$ au voisinage de $+\infty$, mais on a $x \leqslant \sqrt{x}$ au voisinage de 0^+.
La fonction tan n'est définie sur aucun voisinage de $+\infty$.

Relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence

Soit $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$ ou $a = +\infty$, ce que l'on peut noter $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
On considère, dans cette partie, des fonctions f et g définies au voisinage de a (sauf peut-être en a), et qui ne s'annulent pas au voisinage de a (sauf peut-être en a). Autrement dit, on suppose qu'il existe un voisinage V_a de a tel que, pour tout $x \in V_a \setminus \{a\}$, $f(x) \neq 0$ et $g(x) \neq 0$.
Définition : on dit que

- $f(x)$ est **dominée** par $g(x)$ au voisinage de a si le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est borné au voisinage de a.
  Autrement dit, s'il existe un voisinage V_a de a et une constante M tels que :
  $$\boxed{\text{pour tout } x \in V_a \setminus \{a\},\ \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant M}.$$
  On note $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ au voisinage de a, ou encore $\boxed{f(x) = \underset{a}{\mathcal{O}}(g(x))}$.
- $f(x)$ est **négligeable** devant $g(x)$ au voisinage de a si le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 0 lorsque x tend vers a, autrement dit si
  $$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}.$$
  On note $f(x) = o(g(x))$ au voisinage de a, ou encore $\boxed{f(x) = \underset{a}{o}(g(x))}$, ou parfois, *entre nous* : $f(x) \underset{a}{<<} g(x)$. S'il y a ambiguité sur la variable, on note $f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$.
- $f(x)$ est **équivalente** à $g(x)$ au voisinage de a si le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 1 lorsque x tend vers a, autrement dit si
  $$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1}.$$
  On note $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de a, ou encore $\boxed{f(x) \underset{a}{\sim} g(x)}$ (ou $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$).

Résumé :

$\boxed{\left(f = \underset{a}{\mathcal{O}}(g)\right) \Leftrightarrow \left(\dfrac{f}{g} \text{ bornée au voisinage de } a\right) \Leftrightarrow (f(x) = g(x) \times B(x) \text{ avec } B \text{ bornée au voisinage de } a)}$.

$\boxed{\left(f = \underset{a}{o}(g)\right) \Leftrightarrow \left(\dfrac{f}{g} \underset{a}{\longrightarrow} 0\right) \Leftrightarrow \left(f(x) = g(x) \times \varepsilon(x) \text{ avec } \lim\limits_{x\to a} (\varepsilon(x)) = 0\right)}$.

$\boxed{\left(f \underset{a}{\sim} g\right) \Leftrightarrow \left(\dfrac{f}{g} \underset{a}{\longrightarrow} 1\right) \Leftrightarrow \left(f(x) = g(x) \times u(x) \text{ avec } \lim\limits_{x\to a} (u(x)) = 1\right)}$.

Exemple : $\underset{a}{o}(x^n) = x^n \times \varepsilon(x)$ où ε représente une fonction telle que $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.
Conséquence : $\underset{a}{o}(1)$ représente une quantité qui tend vers 0 au point a.
Remarque : on a $f \times o(g) = o(fg) = fg \times o(1)$. Mais aussi $\lambda o(f) = o(f)$ si la constante $\lambda \neq 0$.

Propriétés :

- $\boxed{\text{Il est INTERDIT D'ÉCRIRE } f(x) \sim 0}$ sans réfléchir ! En effet, ceci signifie que $f = \tilde{0} \times H$, avec $\lim H = 1$, donc que f est constante nulle sur un voisinage de a, ce qui arrivera rarement !
- Au voisinage de a : $\boxed{f \pm o(f) \sim f}$. Et aussi : $\boxed{o(f) \pm o(f) = o(f)}$.
- Au voisinage de a : $\boxed{f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o\,(g(x))}$.
- ATTENTION : $f \underset{a}{\sim} g$ ne signifie pas, en général, que $(f-g) \underset{a}{\to} 0$. Exemple : $x^3 + x \underset{+\infty}{\sim} x^3$.
- On peut effectuer des produits, des quotients d'équivalents pour en obtenir des nouveaux. On peut également élever des équivalents à une puissance constante.

  Exemple : si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $f^2 \underset{a}{\sim} g^2$, $\dfrac{1}{f} \underset{a}{\sim} \dfrac{1}{g}$, $\sqrt{f} \underset{a}{\sim} \sqrt{g}$ (sous réserve d'existence).
- ATTENTION : on ne peut pas, en général, sommer des équivalents ni composer des équivalents par des fonctions quelconques. Voir cas particuliers dans le cours ou les exercices.
  Pour sommer, il est conseillé d'utiliser les écritures avec les $o(\,)$. Exemple :
  $$\sin(x) - e^x + \sqrt{1+x} = (x + o(x)) - (1 + x + o(x)) + \left(1 + \tfrac{1}{2}x + o(x)\right) = \tfrac{1}{2}x + o(x) \sim \tfrac{1}{2}x.$$
- $\boxed{\text{Si } f(x) \underset{a}{\sim} g(x)}$, alors :

  ♡ $\boxed{f(x) \text{ et } g(x) \text{ ont le même signe au voisinage de } a}$.

  ♡ si $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existe, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ aussi et $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)}$.
- A RETENIR : si f est dérivable en a et $\boxed{f'(a) \neq 0}$ alors $\boxed{(f(x) - f(a)) \underset{a}{\sim} f'(a)\,(x-a)}$.

EQUIVALENTS USUELS : **au voisinage de** 0 i.e lorsque $\boxed{u \to 0}$,

- $\boxed{\sin(u) \sim u}$, $\boxed{\tan(u) \sim u}$, $\boxed{\cos(u) \sim 1}$ et $\boxed{(1 - \cos(u)) \sim \tfrac{1}{2}u^2}$.
- $\boxed{\mathrm{sh}(u) \sim u}$, $\boxed{\mathrm{ch}(u) \sim 1}$ et $\boxed{(\mathrm{ch}(u) - 1) \sim \tfrac{1}{2}u^2}$.
- $\boxed{\ln(1+u) \sim u}$, $\boxed{e^u \sim 1}$ et $\boxed{(e^u - 1) \sim u}$.
- si α est une CONSTANTE : $\boxed{(1+u)^\alpha \sim 1}$ et $\boxed{((1+u)^\alpha - 1) \sim \alpha u}$.

  Exemples : $\boxed{\left(\sqrt{1+u} - 1\right) \sim \dfrac{1}{2}u}$, $\boxed{\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+u}} - 1\right) \sim -\dfrac{1}{2}u}$, $\left((1+u)^5 - 1\right) \sim 5u$.

CROISSANCES COMPARÉES USUELLES :

- Si α et β sont des CONSTANTES telles que $\boxed{\alpha < \beta}$, alors :
  $$\boxed{x^\alpha = \underset{+\infty}{o}(x^\beta)} \quad \text{et} \quad \boxed{x^\beta = \underset{0}{o}(x^\alpha)}, \quad \text{(i.e) } x^\alpha \underset{+\infty}{<<} x^\beta \quad \text{et} \quad x^\beta \underset{0}{<<} x^\alpha.$$

Exemples :

$\boxed{x^{\frac{1}{3}} \underset{+\infty}{<<} x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \underset{+\infty}{<<} x \underset{+\infty}{<<} x^2 \underset{+\infty}{<<} x^3 \underset{+\infty}{<<} x^5}$ et $\boxed{x^{-3} = \frac{1}{x^3} \underset{+\infty}{<<} x^{-1} = \frac{1}{x} \underset{+\infty}{<<} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}}$.

$\boxed{x^3 \underset{0}{<<} x^2 \underset{0}{<<} x \underset{0}{<<} x^{1/2} = \sqrt{x} \underset{0}{<<} x^{1/3}}$ et $\boxed{x^{-1/3} \underset{0}{<<} x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{0}{<<} x^{-1} = \frac{1}{x} \underset{0}{<<} x^{-2} = \frac{1}{x^2} \underset{0}{<<} x^{-3}}$.

- Si α, β et γ sont des CONSTANTES strictement positives i.e $\boxed{\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0}$, alors :

$$\boxed{\ln^\alpha(x) = \underset{+\infty}{o}(x^\beta)} \quad \text{et} \quad \boxed{x^\beta = \underset{+\infty}{o}(e^{\gamma x})}, \quad \text{i.e} \quad \boxed{\ln^\alpha(x) \underset{+\infty}{<<} x^\beta \underset{+\infty}{<<} e^{\gamma x}}.$$

Exemples :

$$\boxed{\sqrt{\ln(x)} \underset{+\infty}{<<} \ln(x) \underset{+\infty}{<<} \ln^{10}(x) \underset{+\infty}{<<} \sqrt{x} \underset{+\infty}{<<} x \underset{+\infty}{<<} x^{10} \underset{+\infty}{<<} \sqrt{e^x} = e^{\frac{1}{2}x} \underset{+\infty}{<<} e^x \underset{+\infty}{<<} e^{10x} = (e^x)^{10}}.$$

- Si α est une CONSTANTE strictement positive i.e $\boxed{\alpha > 0}$,

  ♡ on a $\boxed{\lim_{x\to-\infty} (|x|^\alpha e^x) = 0}$, donc $e^x = \underset{-\infty}{o}\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)$. Exemple : $e^x = \underset{-\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

  ♡ on a $\boxed{\lim_{x\to0^+} (x^\alpha \ln(x)) = 0}$, donc $\ln(x) = \underset{0^+}{o}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$. Exemple : $\ln(x) = \underset{0^+}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

NOTION DE DÉVELOPPEMENT LIMITÉ

I - Développement limité en 0

On dit qu'une fonction f admet un développement limité d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) au voisinage de 0 (noté, *entre nous*, $\mathrm{DL}_n(0)$) s'il existe un polynôme $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n$ tel que, sur un voisinage de 0 :

$$f(x) = P(x) + o(x^n) \quad \text{(ie)} \quad f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

où ε est une fonction telle que $\varepsilon(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$.

Exemples :

- $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + x^n\varepsilon(x)$ (i.e) $\boxed{\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)}$.
- $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + x^n\varepsilon(x)$ (i.e) $\boxed{\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)}$.
- $\mathrm{DL}_1(0)$ de $\sin(x) = x + o(x)$, $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\mathrm{ch}(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

II - Développement limité en $a \in \mathbb{R}$

On dit qu'une fonction f admet un développement limité d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ (noté, *entre nous*, $\mathrm{DL}_n(a)$) s'il existe un polynôme $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n$ tel que, sur un voisinage de $h = 0$:

$$f(a+h) = P(h) + o(h^n) \quad \text{(ie)} \quad \boxed{f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \cdots + \alpha_n h^n + o(h^n)}.$$

Donc, avec $\boxed{x = a + h \to a}$ et $\boxed{h = x - a \to 0}$:

$$f(x) = P(x-a) + o((x-a)^n) \quad \text{(ie)} \quad \boxed{f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \cdots + \alpha_n(x-a)^n + o((x-a)^n)}.$$

Exemples :

- $\mathrm{DL}_3(x\to1)$ de $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - h^3 + o(h^3) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + o((x-1)^3)$.
- $\mathrm{DL}_2(x \to \frac{\pi}{2})$ de $\sin(x) = \sin(\dfrac{\pi}{2} + h) = \cos(h) = 1 - \dfrac{h^2}{2} + o(h^2) = 1 - \dfrac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2} + o\left((x - \dfrac{\pi}{2})^2\right)$.

Méthode : pour obtenir un $\mathrm{DL}_n(x \to a)$ de $f(x)$, on écrit, en posant $x = a+h \to a$ et par conséquent $h = x - a \to 0$, $f(x) = f(a+h)$ dont on cherche un $\mathrm{DL}_n(h \to 0)$. Puis on remplace h par $(x-a)$, **SANS DÉVELOPPER** les $(x-a)^k$!

III - Propriétés

- Equivalent : (sous réserve d'existence),
  $f(x)$ est équivalent, lorsque $x \to a$, au 1^{er} terme non nul de son $\mathrm{DL}_n(a)$.
- Définition : on appelle **forme normalisée** d'un $\mathrm{DL}(a)$ de f l'écriture :
  $$f(a+h) = h^p(a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + o(h^n)), \quad \text{avec } a_0 \neq 0.$$
  Dans ce cas, $f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} a_0 h^p$ (ou encore $f(x) \underset{x\to a}{\sim} a_0(x-a)^p$).
- Unicité : si f possède un $\mathrm{DL}_n(a)$, alors celui-ci est unique, (i.e) les coefficients α_k de la partie polynômiale (appelée *partie régulière* du DL) sont uniques.
  Intérêt : par unicité d'écriture du $\mathrm{DL}_n(a)$, on peut identifier les coefficients si on a deux expressions de ce même $\mathrm{DL}_n(a)$.
  Application : si f est une fonction paire, alors son $\mathrm{DL}_n(0)$ ne comporte que des monômes de puissance paire.
  De même, si f est une fonction impaire, alors son $\mathrm{DL}_n(0)$ ne comporte que des monômes de puissance impaire.
- Troncature : si f a un $\mathrm{DL}_n(a)$, alors f possède également un $\mathrm{DL}_p(a)$ pour tout $p \leqslant n$. On obtient ce $\mathrm{DL}_p(a)$ tout simplement en tronquant le $\mathrm{DL}_n(a)$ à l'ordre p !

IV - La formule de Taylor-Young

Elle permet d'obtenir les $\mathrm{DL}_n(a)$ pour les fonctions usuelles. Soit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Théorème : si f est de classe C^n au voisinage de a (i.e n **fois dérivable** avec une dérivée $n^{\text{ième}}$ $f^{(n)}$ **continue** au voisinage de a), alors f possède un $\mathrm{DL}_n(a)$ donné par la formule :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)}.$$

Autrement dit :

$$\boxed{f(x) = f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)}.$$

Ou encore, avec $h = x - a \to 0$:

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + f^{(1)}(a)h + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n)}.$$

En particulier (lorsque $a = 0$) : si f est de classe C^n au voisinage de 0, alors f possède un $\mathrm{DL}_n(x \to 0)$ donné par :

$$\boxed{f(x) = f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)}.$$

Applications : les fonctions suivantes sont de classe C^∞ au voisinage de 0 (i.e indéfiniment dérivables), donc de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de 0. Elles admettent donc un $\mathrm{DL}_n(0)$ pour tout ordre n donné par les formules :

- $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\boxed{\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)}$ i.e $\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)}$.
- $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n)}$.

D'où $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\boxed{\ln(1-x) = -\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}\right) + o(x^n) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)}$.

- $\mathrm{DL}_{2n+2}(0)$ de $\boxed{\sin(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})}$.
- $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ de $\boxed{\cos(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2n+1}) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})}$.
- Avec α CONSTANTE : $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1).(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)}$.

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1).(\alpha-2)}{1.2.3}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1.2.3.\ldots.(n-1).n}x^n + o(x^n)}.$$

Ou encore $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_\alpha^k x^k + o(x^n)$, en définissant le *coefficient binomial généralisé*

$$\mathrm{C}_\alpha^k = \frac{\alpha \times (\alpha-1) \times \ldots \times (\alpha-k+1)}{k \times (k-1) \times \ldots \times 2 \times 1} \qquad \text{(notion hors-programme à rappeler).}$$

A l'ordre 3, cela donne : $\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + o(x^3)}$.

Exemples : avec $\alpha = \pm\dfrac{1}{2}$, on obtient les $\mathrm{DL}_3(0)$:

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + o(x^3)}.$$

V - Opérations sur les développements limités

- Combinaison linéaire : si f et g ont des $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme
$$f(x) = P(x) + o(x^n) \text{ et } g(x) = Q(x) + o(x^n),$$
alors, pour λ et μ constantes, la fonction $\lambda f + \mu g$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme
$$\lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda P(x) + \mu Q(x) + o(x^n).$$
Exemples : DL(0) de
$$\mathrm{sh}(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ch}(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2n+1}).$$
En particulier : $\boxed{\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)}$ et $\boxed{\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)}$.
- Produit : si f et g ont des $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme
$$f(x) = P(x) + o(x^n) \text{ et } g(x) = Q(x) + o(x^n),$$
alors la fonction $f \times g$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme
$$f(x) \times g(x) = R(x) + o(x^n)$$
où $R(x)$ est le polynôme produit $P(x) \times Q(x)$ TRONQUÉ à l'ordre n.
- Composition : si f et g ont des $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme
$$f(x) = P(x) + o(x^n) \text{ et } g(x) = Q(x) + o(x^n), \text{ avec } \boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = 0}$$
alors la fonction $g \circ f$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme
$$g(f(x)) = R(x) + o(x^n)$$
où $R(x)$ est le polynôme composé $Q \circ P(x) = Q(P(x))$ TRONQUÉ à l'ordre n.

- Inverse : si f possède un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme
$$f(x) = P(x) + o(x^n) \text{ avec } \boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = 0}$$
alors la fonction $\dfrac{1}{1-f(x)}$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme
$$\frac{1}{1-f(x)} = R(x) + o(x^n)$$
où $R(x)$ est le polynôme composé $\big(1 + P(x) + P^2(x) + \cdots + P^n(x)\big)$ TRONQUÉ à l'ordre n.
En résumé : pour inverser un DL, on compose, si c'est possible, avec le DL de $\dfrac{1}{1\pm u}$ où $u \to 0$.
Exemple : $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\boxed{\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)}$ (ou mieux : $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^6)$).

- Primitivation : si f est continue au voisinage de 0, et possède un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme
$$f(x) = P(x) + o(x^n),$$
alors toute primitive F de f possède un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ de la forme
$$F(x) = F(0) + \int_0^x P(t)\mathrm{d}t + o(x^{n+1}).$$
Pour simplifier : on intègre terme à terme le DL de f pour obtenir celui de F, sans oublier la constante $F(0)$. Plus généralement : si f possède un $\mathrm{DL}_n(\alpha)$ de la forme
$$f(x) = a_0 + a_1(x-\alpha) + a_2(x-\alpha)^2 + a_3(x-\alpha)^3 + \cdots + a_n(x-\alpha)^n + o((x-\alpha)^n)$$
alors, si F est une primitive de f au voisinage de α, cette primitive F admet le $\mathrm{DL}_{n+1}(\alpha)$
$$F(x) = F(\alpha) + a_0(x-\alpha) + a_1\frac{(x-\alpha)^2}{2} + a_2\frac{(x-\alpha)^3}{3} + +a_3\frac{(x-\alpha)^4}{4} + \cdots + a_n\frac{(x-\alpha)^{n+1}}{n+1} + o((x-\alpha)^{n+1}).$$
Exemples :

  ♡ $\mathrm{DL}_{2n+2}(0)$ de
$$\boxed{\mathrm{Arctan}(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{2p+1} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})}.$$

  ♡ $\mathrm{DL}_6(0)$ de $\mathrm{Arcsin}(x) = x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + o(x^6)$.

  ♡ $\mathrm{DL}_6(0)$ de $\mathrm{Arccos}(x) = \dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{3x^5}{40} + o(x^6)$.

- Dérivation : ATTENTION, il se peut que f possède un DL_n mais que f' n'admette pas de DL_{n-1} (voir cours pour un exemple). On possède néanmoins le résultat suivant :
si f est dérivable au voisinage de 0 et possède un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme
$$f(x) = P(x) + o(x^n),$$
alors, S'IL EXISTE, la dérivée f' de f possède un $\mathrm{DL}_{n-1}(0)$ de la forme
$$f'(x) = P'(x) + o(x^{n-1}).$$
Pour simplifier : s'il existe, on obtient bien le $\mathrm{DL}_{n-1}(0)$ de f' en dérivant terme à terme le $\mathrm{DL}_n(0)$ de f. Dans la pratique, si f est de classe C^∞ au voisinage de 0, alors, grâce au théorème de Taylor-Young, on est assuré de l'existence de DL à tout ordre pour f et f', et le résultat ci-dessus s'applique sans problème. Exemple : trouver le $\mathrm{DL}_6(0)$ de tan en utilisant $\tan' = 1 + \tan^2$.

VI - Applications des développements limités.

- **Recherche d'équivalents, calculs de limites**
Voir exercices.

- **Lien avec la dérivée première**
Si f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$ de la forme $\boxed{f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + o((x-a))}$, **alors** :

♡ $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha_0$.

♡ si $\alpha_0 = f(a)$ i.e si f est continue en a, l'existence du $\mathrm{DL}_1(a)$ permet d'affirmer que $\boxed{f \text{ est dérivable au point } a, \text{ avec } f'(a) = \alpha_1}$.

Dans ce cas, l'équation de la **tangente** Δ au graphe $\mathcal{C}_f$ de f est : $\boxed{Y = \alpha_0 + \alpha_1(X - a)}$.

♡ si on a un $\mathrm{DL}_{\geqslant 2}(a)$ de la forme $\boxed{f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_p(x-a)^p + o((x-a)^p)}$, avec un entier $p \geqslant 2$ et $\boxed{\alpha_p \neq 0}$, alors on a l'équivalent, au voisinage du point a

$$[f(x) - (\alpha_0 + \alpha_1(x-a))] \underset{x \to a}{\sim} \alpha_p(x-a)^p$$

qui permet de déterminer la position (locale) relative, au voisinage de a, de la tangente Δ et de la courbe $\mathcal{C}_f$. En particulier, si p est pair, la courbe reste **localement**, au voisinage de a, au dessus ou en dessous (selon signe de α_p) de cette tangente Δ (*point ordinaire*), et si p est impair, la courbe est «traversée» par cette tangente au point a (*point d'inflexion*).

Complément : il y a même une équivalence entre être dérivable une fois et avoir un DL_1. Précisément :

$\boxed{(f \text{ a un } \mathrm{DL}_1(a) : f(x) = f(a) + \alpha(x-a) + o(x-a)) \Leftrightarrow (f \text{ est dérivable une fois en } a \text{ et } f'(a) = \alpha)}$.

Attention : cette équivalence ne tient plus à partir de l'ordre 2 (voir cours sur la dérivation).

- **Comportement asymptotique**

Lorsque $x \to \pm\infty$, si $f(x) \to \pm\infty$, on étudie la nature de la branche infinie.
On cherche un équivalent simple de $f(x)$ de la forme $f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} g(x)$.
On a donc $f(x) = g(x) \times u(x)$ avec $\lim_{x \to \pm\infty} u(x) = 1$.
En posant $h = \frac{1}{x}$, on a, avec $x \to \pm\infty$, $h \to 0$. On peut donc chercher, s'il existe, un $\mathrm{DL}_n(h \to 0)$ de $u(x) = u\left(\frac{1}{h}\right) = 1 + \alpha_1 h + \cdots + \alpha_p h^p + \underset{h \to 0}{o}(h^p) = 1 + \alpha_1 \frac{1}{x} + \cdots + \alpha_p \left(\frac{1}{x}\right)^p + \underset{x \to \pm\infty}{o}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^p\right)$.
Puis, en multipliant par $g(x)$, on obtient ce qu'on appelle un **développement asymptotique** de $f(x)$ au voisinage de $\pm\infty$:

$$f(x) = g(x)u(x) = g(x) + \alpha_1 \frac{g(x)}{x} + \cdots + \alpha_p \frac{g(x)}{x^p} + \underset{x \to \pm\infty}{o}\left(\frac{g(x)}{x^p}\right).$$

Un cas particulier (courant) : l'équivalent de $f(x)$ en $\pm\infty$ est de la forme $g(x) = \beta x^q$. Dans ce cas, le développement asymptotique de $f(x)$ en $\pm\infty$ s'écrit comme une combinaison linéaire de puissances décroissante de x, puissances d'abord positives puis éventuellement négatives. Cela permet d'en déduire des courbes (polynomiales) asymptotes et la position locale, au voisinage de $\pm\infty$, entre ces asymptotes et $\mathcal{C}_f$.

Exemple : $f(x) = (x-2)\exp\left(\frac{1}{1+x}\right) = (x-2)e^{\frac{1}{1+x}}$. On a clairement : $f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} x$.
On pose $u(x) = \frac{f(x)}{x} \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 1$, et $h = \frac{1}{x} \to 0$: $u(x) = u(\frac{1}{h}) = hf(\frac{1}{h}) = (1-2h)\exp\left(\frac{h}{h+1}\right)$, expression dont on cherche un $\mathrm{DL}_2(h \to 0)$. On trouve $u(x) = u(\frac{1}{h}) = 1 - h - \frac{5}{2}h^2 + \underset{h \to 0}{o}(h^2)$, i.e $u(x) = \frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{1}{x} - \frac{5}{2x^2} + \underset{x \to \pm\infty}{o}(\frac{1}{x^2})$, puis $f(x) = x - 1 - \frac{5}{2x} + \underset{x \to \pm\infty}{o}(\frac{1}{x})$.
On en tire l'équivalent $[f(x) - (x-1)] \underset{x \to \pm\infty}{\sim} -\frac{5}{2x} \to 0$.
D'où l'existence d'une droite asymptote Δ, d'équation $Y = X - 1$. De plus, comme $f(x) - (x-1)$ est du signe de $-\frac{5}{2x}$ au voisinage de $\pm\infty$, on a $\mathcal{C}_f$ au dessus de Δ au voisinage de $-\infty$, et en dessous au voisinage de $+\infty$.
Remarque : $\lim_{x \to -1^+} (f(x)) = -\infty$, donc présence d'une droite asymptote verticale $X = -1$.

Développements limités usuels à connaître

- $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\dfrac{1}{1-x}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n)$ i.e $\boxed{\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+o(x^n)}$.
- $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\dfrac{1}{1+x}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^kx^k+o(x^n)$ i.e $\boxed{\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+o(x^n)}$.
- $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\exp(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)$ i.e $\boxed{e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)}$.
- $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\ln(1+x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}+o(x^n)$ i.e $\boxed{\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+o(x^n)}$.
- $\mathrm{DL}_n(0)$ de $-\ln(1-x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}+o(x^n)$ $\boxed{-\ln(1-x)=x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\cdots+\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)}$.
- $\mathrm{DL}_{2n+2}(0)$ de $\sin(x)=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^px^{2p+1}}{(2p+1)!}+o(x^{2n+2})$ i.e

$$\boxed{\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\cdots+\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})}.$$

- $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ de $\cos(x)=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^px^{2p}}{(2p)!}+o(x^{2n+1})$ i.e

$$\boxed{\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\cdots+\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})}.$$

- $\mathrm{DL}_n(0)$ de $(1+x)^\alpha=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1).(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_\alpha^kx^k+o(x^n)$ i.e

$$\boxed{(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2.1}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1).(\alpha-2)}{3.2.1}x^3+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n.(n-1).\dots.2.1}x^n+o(x^n)}.$$

  Exemple : $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\boxed{(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1).(\alpha-2)}{6}x^3+o(x^3)}$.
- $\mathrm{DL}_{2n+2}(0)$ de $\mathrm{Arctan}(x)=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^px^{2p+1}}{2p+1}+o(x^{2n+2})$ i.e

$$\boxed{\mathrm{Arctan}(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})}.$$

- $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\boxed{\tan(x)=x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)}$.

Développements limités à savoir retrouver

- $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\boxed{\sqrt{1+x}=1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x^3}{16}+o(x^3)}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{3x^2}{8}-\dfrac{5x^3}{16}+o(x^3)$.
- $\mathrm{DL}(0)$ de $\mathrm{sh}(x)=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+o(x^{2n+2})$ et $\mathrm{ch}(x)=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{x^{2p}}{(2p)!}+o(x^{2n+1})$.
- $\mathrm{DL}_6(0)$ de $\boxed{\tan(x)=x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+o(x^6)}$ et $\mathrm{Arcsin}(x)=x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{3x^5}{40}+o(x^6)$.