

RAPPELS-COMPLÉMENTS sur INTÉGRALES et PRIMITIVES

I - Rappels sur la notion de primitive - lien avec l'intégrale

Soit f , une fonction définie sur un **intervalle** I de $\mathbb{R}$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition :

On dit qu'une fonction F est **une primitive** de f sur I si

- F est dérivable sur I
- la dérivée de F sur I est la fonction f , (i.e) $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Existence de primitives :

Le seul résultat à notre disposition, pour l'instant, est le suivant (*preuve provisoirement admise*) :

Théorème : si f est une **fonction continue** sur un **intervalle** I , alors

- f admet des primitives sur cet intervalle I .
- pour tout a fixé dans l'intervalle I , la fonction H définie par

$$\forall x \in I, H(x) = \int_a^x f(t)dt$$

représente une des primitives de f sur l'intervalle I : $H'(x) = \frac{d(H(x))}{dx} = \frac{d(\int_a^x f(t)dt)}{dx} = f(x)$.

- toute primitive F de f sur l'**intervalle** I est égale à H à une constante près, (i.e) il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in I, F(x) = H(x) + C$.

Précisément : pour $a \in I$, on a la formule $\forall x \in I, F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$.

De plus, pour tout α, β dans I : $\int_\alpha^\beta f(t)dt = F(\beta) - F(\alpha) = H(\beta) - H(\alpha)$.

- la fonction H ainsi définie vérifie : $\forall x \in I, H'(x) = f(x)$, avec f continue sur I .
Donc, H est une fonction de classe C^1 sur I .

De plus, $H(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$: H est LA primitive de f qui s'annule au point a .

ATTENTION : ces résultats ne peuvent s'appliquer que si on travaille sur **un intervalle** !

Remarque : toute primitive de f sur I n'est pas nécessairement de la forme de H .

Par exemple, ch est une primitive de sh sur $\mathbb{R}$, et pourtant il est impossible de trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(x) = \int_a^x \text{sh}(t)dt = \text{ch}(x) - \text{ch}(a)$ car $\text{ch}(a) \neq 0$.

A retenir : $\int_a^b f(x)dx$ existe SI la **fonction** f est **continue** sur le **segment** $[a, b]$.

Notation : si f est une fonction continue sur un intervalle I , la fonction $\left[x \mapsto \int_a^x f(t)dt \right]$ permet de représenter **UNE** primitive de f (pas quelconque, voir remarque ci dessus), où le point « $\cdot$ » désigne un réel quelconque de l'intervalle I . C'est une notation pratique lorsqu'il s'agit juste d'exhiber **UNE** primitive de f sur I . Autre notation : les écritures $\left[x \mapsto \int f(x)dx \right]$ (en précisant $x \in I$), ou $\int f$, représentent une primitive de f (à utiliser avec précaution : voir l'exemple $\int \frac{dx}{x \ln x}$).

Exemples :

- sur $I =]-1, +1[$, $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{Arcsin}(x) + C$ (C = une constante).

- sur $I = \mathbb{R}$, $\int \sin(3x)dx = -\frac{1}{3} \cos(3x) + C$, $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \text{Arctan}(x) + C$.

Rappels

Soit f et g , deux fonctions CONTINUES (i.e C^0) sur le SEGMENT $[A, B]$. On a :

- $\int_A^B (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_A^B f(t)dt + \mu \int_A^B g(t)dt$ où λ, μ constantes (linéarité).
- Si $f \geq 0$ sur $[A, B]$, alors $\int_A^B f(t)dt$ est un réel positif : $\int_A^B f \in \mathbb{R}^+$ (vérifié si $A < B$).
- Si $g \leq f$ sur $[A, B]$, alors $\int_A^B g \leq \int_A^B f$ (croissance de l'intégrale, vérifié si $A < B$).
- $\left| \int_A^B f(t)dt \right| \leq \int_A^B |f(t)| dt$, (i.e) $\left| \int_A^B f \right| \leq \int_A^B |f|$ (inégalité triangulaire, vérifié si $A < B$).
- Si $|g| \leq C$ sur $[A, B]$ (C constante) alors $\left| \int_A^B fg \right| \leq C \int_A^B |f|$ (vérifié si $A < B$).

II - Intégration par parties

On dit qu'une fonction f est **de classe** C^1 sur un intervalle I si f est dérivable sur I ET si sa dérivée est elle-même continue sur I : $(f \text{ } C^1 \text{ sur } I) \Leftrightarrow (f \text{ dérivable et } f' \text{ continue sur } I)$.

Proposition

Si u et v sont des fonctions de classe C^1 sur l'intervalle $[a, b]$, alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

autrement dit

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

Preuve : la fonction $g = uv$ est de classe C^1 sur l'intervalle $I = [a, b]$ (comme produit de fonctions C^1). Sa dérivée, continue sur l'intervalle I , est $g' = u'v + uv'$.

La fonction g est donc une primitive, sur I , de $u'v + uv'$, fonction continue sur I . Ainsi,

$$\int_a^b (u'v + uv')(t)dt = [g(t)]_{t=a}^{t=b} \quad \text{d'où} \quad \int_a^b (u'v)(t)dt + \int_a^b (uv')(t)dt = [g(b) - g(a)]$$

par linéarité de l'intégration. D'où le résultat.

Proposition (intégration par parties et primitives)

Si u et v sont des fonctions de classe C^1 sur un intervalle I , alors

$$\forall x \in I, \quad \int_{\cdot}^x u'(t)v(t)dt = u(x)v(x) - \int_{\cdot}^x u(t)v'(t)dt$$

ou encore

$$\text{sur } I : \quad \int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$$

ou encore

$$\text{sur } I : \quad \int u'v = uv - \int uv' \quad \text{et} \quad \text{sur } I = [a, b] : \quad \int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

Exemples :

- $\int_0^3 xe^{2x}dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}.x\right]_0^3 - \int_0^3 \frac{1}{2}e^{2x}dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}.x\right]_0^3 - \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^3 = \frac{5}{4}e^6 - \frac{1}{4}$, avec $u'(x) = e^{2x}$, $v(x) = x$.

- La fonction $\ln$ est continue sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$: elle admet donc des primitives sur cet intervalle. On a donc, en posant $u'(t) = 1$, $v(t) = \ln(t)$, puis $u(t) = t$ et $v'(t) = \frac{1}{t}$:

$$\forall x \in I, \int \ln(t) dt = \int 1 \cdot \ln(t) dt = x \cdot \ln(x) - \int t \cdot \frac{1}{t} dt = x \ln(x) - \int 1 dt = x \ln(x) - x.$$

Conclusion : sur $]0, +\infty[$, $\boxed{\int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - x}$ (à une constante près).

- On sait que, sur $\mathbb{R}$, $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{Arctan}(x) + C$. Mais d'autre part,

$$\int 1 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = x \cdot \frac{1}{1+x^2} - \int x \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{x}{1+x^2} + 2 \int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^2} dx$$

$$\text{d'où } \int 1 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{x}{1+x^2} + 2 \left(\int \frac{1}{1+x^2} dx - \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \right)$$

$$\text{d'où } \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1+x^2} + \int \frac{1}{1+x^2} dx \right).$$

$$\text{Autrement dit, sur } \mathbb{R}, \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \text{Arctan}(x) + \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} + C \text{ (avec } C \in \mathbb{R})$$

- $\int \ln(x) dx = [x \ln(x)] - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - \int 1 dx = x \ln(x) - x + K$ (K constante).
- $\int x e^x dx = [x \cdot e^x] - \int 1 \cdot e^x dx = x e^x - e^x + K$.
- $\int \text{Arctan}(x) dx = [x \cdot \text{Arctan}(x)] - \int x \frac{1}{1+x^2} dx = x \cdot \text{Arctan}(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + K$.
- $\int x \tan^2(x) dx = [x \cdot (\tan(x) - x)] - \int 1 \cdot (\tan(x) - x) dx = x \tan(x) - \frac{x^2}{2} + \ln(|\cos(x)|) + K$.
- $\int x \sin(x) dx = [x \cdot (-\cos(x))] - \int 1 \cdot (-\cos(x)) dx = -x \cos(x) + \sin(x) + K$.

III - Changement de variable dans une intégrale

Proposition

Soit φ , une fonction de classe C^1 sur le segment $[\alpha, \beta]$, et f , une fonction continue sur $\varphi([\alpha, \beta])$.

Alors, en posant $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Preuve : f étant continue sur $I = \varphi([\alpha, \beta])$, elle y admet des primitives. Notons F une de celles-ci. On a :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

D'autre part : la fonction φ étant de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$, φ' est continue sur $[\alpha, \beta]$, donc la fonction $[t \mapsto f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)]$ est continue sur $[\alpha, \beta]$ (comme produit et composée de fonctions continues), et admet $[t \mapsto F(\varphi(t))]$ comme primitive car la dérivée de la composée $F \circ \varphi$ est $(F \circ \varphi)' = \varphi' \times (F' \circ \varphi)$ i.e $(F \circ \varphi)' = \varphi' \times (f \circ \varphi)$, ou encore $[F(\varphi)]' = \varphi' \times f(\varphi)$. D'où

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} [F(\varphi)]' = [F(\varphi)]_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Pratique : on veut calculer l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$. On pose $x = \varphi(t)$ où la fonction φ (bien choisie)

est de classe C^1 sur un intervalle contenant deux valeurs α, β telles que $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \varphi(\beta)$.

On effectue le changement de bornes :

t	α	β
$x = \varphi(t)$	$a = \varphi(\alpha)$	$b = \varphi(\beta)$

où φ est de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$ ou $[\beta, \alpha]$. On remplace tous les x par $\varphi(t)$ et $dx = \varphi'(t)dt$.

En effet : $\varphi'(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}$ d'où $\varphi'(t)dt = dx$.

Autre présentation : si on a une intégrale de la forme $I = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, avec φ fonction de

classe C^1 entre α et β , alors $I = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$.

Cas courant : si φ est, en plus, bijective, alors $x = \varphi(t) \Leftrightarrow \varphi^{-1}(x) = t$.

Si $\psi = \varphi^{-1}$ est dérivable, on a $t = \psi(x)$, $dt = \psi'(x)dx$ et

x	a	b
$t = \psi(x)$	$\psi(a)$	$\psi(b)$

Attention : après changement de variables, il ne doit subsister, dans l'intégrale, que des termes en la nouvelle variable avec les bonnes bornes (pas de mélange entre les différentes variables) !

Exemples :

- Montrer l'égalité $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$).

On effectue le changement de variables $x = \frac{\pi}{2} - t$ dans la première intégrale : $dx = -dt$,

t	$\frac{\pi}{2}$	0
$x = \frac{\pi}{2} - t$	0	$\frac{\pi}{2}$

D'où $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n(\frac{\pi}{2} - t)(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$, d'où le résultat

car x et t sont des variables muettes dans les intégrales.

Rem : $t \mapsto x = \varphi(t) = \frac{\pi}{2} - t$ est bien une fonction C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

- Si f est paire sur $[-a, +a]$, alors $\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$.

En effet, avec le changement de variable $y = -x$ (i.e) $x = -y$, on a $dx = -dy$ et

$y = -x$	$+a$	0
x	$-a$	0

D'où $\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_{+a}^0 f(-y)(-dy) = \int_0^{+a} f(-y)dy = \int_0^{+a} f(y)dy$

car f paire (donc $f(-y) = f(y)$). D'où le résultat (x, y sont des variables muettes).

On a donc prouvé : si f est paire, alors $\int_{-a}^{+a} f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$.

De même, si g est impaire, on prouve $\int_{-a}^0 g(x)dx = - \int_0^a g(x)dx$ puis $\int_{-a}^{+a} g(x)dx = 0$.

- De même, à l'aide d'un changement de variables, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction T -périodique, alors :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \left[\int_a^b f = \int_{a+T}^{b+T} f \right], \text{ puis } \left[\int_a^{a+T} f = \int_b^{b+T} f = \int_0^T f \right].$$

- On veut calculer $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t) \cos(t)}{1 + \cos^2(t)} dt$.

On pose $x = \cos(t)$ donc $dx = -\sin(t)dt$ et

$x = \cos(t)$	$\cos(0) = 1$	$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$
t	0	$\frac{\pi}{2}$

D'où $A = \int_1^0 \frac{x}{1+x^2}(-dx) = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$.

Rem : $t \mapsto x = \varphi(t) = \cos(t)$ est bien une fonction C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

- On veut calculer $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3 + \cos^2(t)} dt$.

On pose $x = \tan(t)$ donc $dx = \frac{1}{\cos^2(t)} dt$ et

$x = \tan(t)$	$\tan(0) = 0$	$\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$
t	0	$\frac{\pi}{4}$

D'où $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(t)}{3 + \cos^2(t)} \frac{1}{\cos^2(t)} dt$. On rappelle $\cos^2(t) = \frac{1}{1 + \tan^2(t)} = \frac{1}{1 + x^2}$.

D'où $A = \int_0^1 \frac{\frac{1}{1+x^2}}{3 + \frac{1}{1+x^2}} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{x^2 + \frac{4}{3}} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{x^2 + (\frac{2}{\sqrt{3}})^2} dx = \frac{1}{3} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right]_0^1$

Donc $A = \frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Rem : $t \mapsto x = \varphi(t) = \tan(t)$ est bien une fonction C^1 sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Remarque : on a utilisé, avec a, b réels fixés et $a \neq 0$:

$$\int \frac{dx}{(x+b)^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+b}{a}\right) + C \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Preuve : posons $F(x) = \int \frac{dx}{(x+b)^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(\frac{x+b}{a})^2 + 1}$.

On effectue le changement de variable $t = \frac{x+b}{a}$ d'où $dx = a dt$.

On a $F(x) = \frac{1}{a^2} \int \frac{a dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{a} \operatorname{Arctan}(t) + C$, puis on n'oublie pas de revenir

en la variable x , d'où $F(x) = \frac{1}{a} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+b}{a}\right) + C$.

- On veut calculer $A = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$.

On pose $t = \sqrt{x+1}$ donc $x = t^2 - 1$ puis $dx = 2t dt$ et

$t = \sqrt{x+1}$	$\sqrt{0+1} = 1$	$\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
x	0	1

D'où $A = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2 - 1}{t} 2t dt = \int_1^{\sqrt{2}} 2(t^2 - 1) dt = \left[2\left(\frac{t^3}{3} - t\right) \right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{6}$.

Rem : $t \mapsto x = \varphi(t) = t^2 - 1$ est bien une fonction C^1 sur $[1, \sqrt{2}]$.

- On cherche une primitive de $f : x \mapsto f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x-1}}$, définie et continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Ces primitives existent donc sur cet intervalle $[1, +\infty[$.

On en note une $F(x) = \int \frac{1}{1 + \sqrt{x-1}} dx$.

Posons le changement de variable $t = \sqrt{x-1}$, i.e $x = t^2 + 1 = \varphi(t)$: φ est une bijection de classe C^1 de $[0, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$, et $dx = 2t dt$.

$F(x) = \int \frac{2t}{1+t} dt = 2 \int \frac{t+1-1}{1+t} dt = 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = 2(t - \ln(1+t)) + K$.

ET ON N'OUBLIE PAS de revenir à la variable initiale !

D'où $F(x) = \int \frac{1}{1 + \sqrt{x-1}} dx = 2(\sqrt{x-1} - \ln(1 + \sqrt{x-1})) + K$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$ (K constante réelle).

IV - Quelques méthodes de calculs de primitives :

Inverse d'un polynôme du 2nd degré

On cherche $\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$ où $P(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$, coefficients réels).

- P a deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$: on décompose

$$\frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a(x - r_1)(x - r_2)} = \frac{1}{a} \left(\frac{\alpha}{x - r_1} + \frac{\beta}{x - r_2} \right) \text{ où } \alpha, \beta \text{ constantes à déterminer.}$$

Puis $\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{a} (\alpha \ln|x - r_1| + \beta \ln|x - r_2|) + K$ sur tout intervalle I sur lequel $P(x) \neq 0$ (i.e ne contenant ni r_1 , ni r_2).

- P a une racine réelle double r_0 : on décompose $\frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \frac{1}{(x - r_0)^2}$.

Puis $\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{a} \left(\frac{-1}{x - r_0} \right) + K$ sur tout intervalle I sur lequel $P(x) \neq 0$ (i.e ne contenant pas r_0).

- P a deux racines complexes conjuguées ($b^2 - 4ac < 0$) : on écrit

$ax^2 + bx + c = a((x + \beta)^2 + \alpha^2)$ (*mise sous forme canonique*) où α, β réels, $\alpha \neq 0$.

Puis $\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{(x + \beta)^2 + \alpha^2} dx = \frac{1}{a} \times \frac{1}{\alpha} \text{Arctan} \left(\frac{x + \beta}{\alpha} \right) + K$, sur $I = \mathbb{R}$.

Produit exponentielle-fonction trigonométrique

On cherche $\int e^{ax} \cos(bx) dx$ et $\int e^{ax} \sin(bx) dx$, avec a et b constantes réelles.

Rappels : $\boxed{e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)}$, $\boxed{e^{\alpha+i\beta} = e^\alpha(\cos(\beta) + i \sin(\beta))}$ et $\boxed{\int e^{\omega x} dx = \frac{1}{\omega} e^{\omega x}}$ si $\omega \in \mathbb{C}^*$.

- On remarque

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx = \text{Re} \left(\int e^{ax} e^{i(bx)} dx \right) = \text{Re} \left(\int e^{(a+ib)x} dx \right) = \text{Re} \left(\frac{1}{a+ib} e^{(a+ib)x} \right) = \dots$$

- De même

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = \text{Im} \left(\int e^{ax} e^{i(bx)} dx \right) = \text{Im} \left(\int e^{(a+ib)x} dx \right) = \text{Im} \left(\frac{1}{a+ib} e^{(a+ib)x} \right) = \dots$$

- Autre méthode : avec deux intégrations par parties successives ($u' = e^{ax}$, $v = \cos(bx)$ ou $\sin(bx)$)

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos(bx) dx &= \left[\frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) \right] + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin(bx) dx + C \\ \int e^{ax} \cos(bx) dx &= \left[\frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) \right] + \frac{b}{a} \left(\left[\frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) \right] - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos(bx) dx \right) + C \text{ d'où } \dots \end{aligned}$$

Produit de cos et sin

On cherche $\int \cos^p(x) \sin^q(x) dx$.

- Si p ou q est un nombre impair, c'est facile (apparition de $\int \cos(x) \sin^n(x) dx$ ou $\int \sin(x) \cos^n(x) dx$).

$$\text{Exemple : } \int \cos^5(x) \sin^4(x) dx = \int \cos^4(x) \sin^4(x) \cos(x) dx = \int (1 - \sin^2(x))^2 \sin^4(x) \cos(x) dx$$

Puis $\int \cos^5(x) \sin^4(x) dx = \int (1 - t^2)^2 t^4 dt$ en effectuant le changement de variables $t = \sin(x)$ (et $dt = \cos(x) dx$), ce qui revient à primitiver un polynôme.

- Si p et q sont tous les deux pairs, on linéarise :

$$\cos^p(x) \sin^q(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^p \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^q = \text{développement...} = \sum_k (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Par linéarité, cela revient à calculer les $\int \cos(kx)dx = \frac{1}{k} \sin(kx)$ et $\int \sin(kx)dx = -\frac{1}{k} \cos(kx)$.

Produit d'un polynôme avec (cos ou sin ou exp)

Méthode générale : on intègre plusieurs fois par parties (autant que le degré du polynôme) de façon à diminuer le degré du polynôme dans l'intégrande, jusqu'à obtenir une constante en facteur de la fonction cos, sin ou exp. Plus précisément :

- $\int \cos(ax)P(x)dx = \frac{1}{a} \sin(ax)P(x) - \frac{1}{a} \int \sin(ax)P'(x)dx.$
- $\int \sin(ax)P(x)dx = -\frac{1}{a} \cos(ax)P(x) + \frac{1}{a} \int \cos(ax)P'(x)dx.$
- $\int e^{ax}P(x)dx = \frac{1}{a} e^{ax}P(x) - \frac{1}{a} \int e^{ax}P'(x)dx.$

où $\deg(P') = \deg(P) - 1$, et on itère le procédé pour continuer à faire baisser le degré du polynôme.

Primitives de quelques fonctions composées (à une constante près sur I)

Soit u , une fonction dérivable sur un intervalle I alors :

- $\frac{u'}{u} = u'u^{-1}$ se primitive en $\ln(|u|)$.

- $u'u^\alpha$ se primitive en $\frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1}$ SI $\alpha \neq -1$.

Exemple : $u'\sqrt{u}$ se primitive en $\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}u\sqrt{u}$.

- $\frac{u'}{u^\beta} = u'u^{-\beta}$ se primitive en $\frac{-1}{\beta-1} \frac{1}{u^{\beta-1}} = \frac{1}{1-\beta} u^{1-\beta}$ SI $\beta \neq +1$.

Exemple : $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ se primitive en $2\sqrt{u}$.

- $u'e^u$ se primitive en e^u .

- $\frac{u'}{1+u^2}$ se primitive en $\text{Arctan}(u)$, $\frac{u'}{1-u^2}$ se primitive en $\frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{1+u}{1-u} \right| \right)$.

- $u' \sin(u)$ se primitive en $-\cos(u)$, $u' \cos(u)$ se primitive en $\sin(u)$.

- $\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ se primitive en $\text{Arcsin}(u)$, $\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$ se primitive en $-\text{Arcsin}(u)$ ET $\text{Arccos}(u)$.

- $\frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$ se primitive en $\ln(u + \sqrt{1+u^2})$.

- $\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$ se primitive en $\begin{cases} F(u) = \ln(u + \sqrt{u^2-1}) & \text{si } u > 1 \text{ sur } I \\ -F(-u) = -\ln(-u + \sqrt{u^2-1}) & \text{si } u < -1 \text{ sur } I \end{cases}$

- $u'(1 + \tan^2(u)) = \frac{u'}{\cos^2(u)}$ se primitive en $\tan(u)$.

- $u' \ln(u)$ se primitive en $(u \ln(u) - u)$.

Dérivées usuelles ($\omega = \text{constante}$) :

$f(x)$	$f'(x)$
x^n , où $n \in \mathbb{N}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$, où $n \in \mathbb{N}$	$\frac{-n}{x^{n+1}} = -n \times x^{-n-1}$
x^n , où $n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\cos(\omega x)$	$-\omega \sin(\omega x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(\omega x)$	$\omega \cos(\omega x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$	$-1 - \cotan^2(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\ln(\omega x) = \ln(\omega) + \ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$	$\frac{1}{\ln a} \times \frac{1}{x}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\exp(\omega x)$	$\omega \exp(x)$
$a^x = e^{x \ln(a)}$ où $a \in \mathbb{R}^{+*}$	$\ln(a) \times a^x$

$f(x)$	$f'(x)$
$\text{ch}(x)$	$\text{sh}(x)$
$\text{sh}(x)$	$\text{ch}(x)$
$\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$	$1 - \text{th}^2(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}$
$\text{Arcsin}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{Arccos}(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{Arctan}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Règles de calculs sur les dérivées :

$(f + g)' = f' + g'$	$(\lambda f)' = \lambda f'$ où $\lambda = \text{constante}$
$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$ où $\lambda, \mu = \text{constantes}$	$(f \times g)' = (f' \times g) + (f \times g')$
$\left(\frac{1}{g} \right)' = \frac{-g'}{g^2}$	$\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$
$(f \circ u)' = (f(u))' = u' \times f'(u)$	$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$

Exemples de dérivées de fonctions composées, u et v fonctions, α constante

$(e^u)' = u'e^u$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$
$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(u^\alpha)' = \alpha u' \cdot u^{\alpha-1}$	$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = \frac{-nu'}{u^{n+1}}$
$(\sin u)' = u' \cos(u)$	$(\cos u)' = -u' \sin(u)$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2(u)} = u'(1 + \tan^2 u)$
$(\operatorname{sh} u)' = u' \operatorname{ch}(u)$	$(\operatorname{ch} u)' = u' \operatorname{sh}(u)$	$(\operatorname{th} u)' = \frac{u'}{\operatorname{ch}^2 u} = u'(1 - \operatorname{th}^2 u)$
$(\operatorname{Arcsin} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$(\operatorname{Arccos} u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$(\operatorname{Arctan} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$

ATTENTION : $(u^v)' = (e^{v \ln(u)})' = \left(v' \ln(u) + v \frac{u'}{u}\right) u^v$

Tableaux de primitives usuelles, ω , n , a , α constantes

$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{F(x)}$ à une constante près par intervalle I
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arcsin}(x)$ ou $-\operatorname{Arccos}(x)$ sur $I =]-1, +1[$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arccos}(x)$ ou $-\operatorname{Arcsin}(x)$ sur $I =]-1, +1[$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{Arctan}(x)$ sur $I = \mathbb{R}$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right)$ sur $I = \mathbb{R}$
$\frac{1}{a^2+(x+b)^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+b}{a}\right)$ sur $I = \mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ sur $I = \mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\begin{cases} \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \text{ sur } I =]+1, +\infty[\\ -\ln(-x + \sqrt{x^2-1}) \text{ sur } I =]-\infty, -1[\end{cases}$
$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right)$	$\frac{1}{2} (\ln 1+x - \ln 1-x) = \frac{1}{2} \ln \left(\left \frac{1+x}{1-x} \right \right)$ sur I avec $\pm 1 \notin I$

$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{F(x)}$ à une constante près par intervalle
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ si $n \neq -1$
$(x-a)^n$	$\frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$\frac{1}{-n+1}x^{-n+1} = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$ si $n \neq +1$
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ si $\alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
$\frac{1}{x-a}$	$\ln(x-a)$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\exp(\omega x)$	$\frac{1}{\omega} \exp(\omega x)$
$a^x = e^{\ln(a)x}$	$\frac{1}{\ln(a)} a^x$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$-\ln \cos(x) $
$\cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$	$\ln \sin(x) $
$\frac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \cotan^2(x)$	$-\cotan(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$
$\sin(\omega x)$	$-\frac{1}{\omega} \cos(\omega x)$
$\cos(\omega x)$	$\frac{1}{\omega} \sin(\omega x)$
$1 + (\tan(\omega x))^2 = \frac{1}{\cos^2(\omega x)}$	$\frac{1}{\omega} \tan(\omega x)$
$\operatorname{sh}(x)$	$\operatorname{ch}(x)$
$\operatorname{ch}(x)$	$\operatorname{sh}(x)$
$\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$	$\ln(\operatorname{ch}(x))$
$1 - (\operatorname{th}(x))^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$	$\operatorname{th}(x)$
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$

V - Cas de fonctions à valeurs complexes

Si $\alpha \in \mathbb{C}$ (constante complexe), les formules suivantes sont encore valables :

$$\boxed{\int e^{\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} + K} \quad \text{si } \alpha \neq 0 \quad (\text{et } K \in \mathbb{C})$$

et

$$\boxed{\int t^\alpha dt = \frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1} + K} \quad \text{si } \alpha \neq -1 \quad (\text{et } K \in \mathbb{C})$$

Rappel : $t^{a+ib} = e^{(a+ib)\ln(t)} = e^{a\ln(t)} \times e^{ib\ln(t)} = e^{a\ln(t)} \times (\cos(b\ln(t)) + i\sin(b\ln(t)))$