EXERCICE 1 :

Déterminer un équivalent simple de la fonction $x \longmapsto x^x - (\sin(x))^x$ au voisisnage de 0.

EXERCICE 2 :

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer J^2 puis J^n, pour tout entier naturel n.
2. En déduire A^n pour tout entier naturel n.

EXERCICE 3 :

Soit G l'ensemble des matrices $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & x \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où x est un réel quelconque.

Montrer que le produit de deux matrices de G est une matirce de G et que l'inverse d'une matrice de G est encore un élément de G.

EXERCICE 4 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que A est inversible et calculer son inverse en résolvant un système linéaire.
2. Vérifier que A est inversible et calculer son inverse par opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A et de l'identité. (algorithme de Gauss-Jordan)
3. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $A^3 - \text{tr}(A)A^2 + \alpha A - 15I_3 = O_3$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

EXERCICE 5 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de période T. On suppose que f admet $L \in \mathbb{R}$ pour limite en $+\infty$. L'objectif de l'exercice est de prouver que f est constante.

1. Donner la définition quantifiée de $f(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} L$ (symboles clés : ϵ, A).
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Comment peut-on choisir n pour que $x + nT > A$? (le A de la définition)
3. En déduire que $f(x) = L$, pour tout x réel.

EXERCICE 6 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 qui vérifie $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = f(x)$.
2. Prouver que f est constante.