EXERCICE 1 :

Pour $0 < x < \alpha \quad (0 < \alpha < \pi)$, $x^x - (\sin(x))^x = \mathrm{e}^{x\ln(x)} - \mathrm{e}^{x\ln(sin(x))} = \mathrm{e}^{x\ln(x)}\left(1 - \mathrm{e}^{x\ln(\frac{\sin(x)}{x})}\right)$ (1).

Or $\dfrac{\sin(x)}{x} = 1 - \dfrac{x^2}{6} + o(x^2)$, en effet $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

De plus, $\ln(1+X) = X + o(X)$, et comme $-\dfrac{x^2}{6} + o(x^2) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on peut écrire que $\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right) = -\dfrac{x^2}{6} + o(x^2)$ et par la suite, $x\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right) = -\dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$

Par ailleurs, au voisinage de 0, $\mathrm{e}^x = 1 + x + o(x)$ et comme $-\dfrac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on obtient :

$$\mathrm{e}^{x\ln(\frac{\sin(x)}{x})} = 1 - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{d'où} \quad 1 - \mathrm{e}^{x\ln(\frac{\sin(x)}{x})} \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{6} \quad (2)$$

$x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $x^x \underset{0}{\sim} 1 \quad (3)$.
L'équivalence étant compatible avec le produit, d'après (1), (2) et (3),

$$\boxed{x^x - (\sin(x))^x \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{6}}$$

EXERCICE 2 :

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. On vérifie aisément que $J^2 = 3J$. Il s'en suit que $J^3 = J^2 \times J = (3J)J = 3J^2 = 9J = 3^2J$. On conjecture donc que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J^n = 3^{n-1}J$. On peut le démontrer par récurrence :
   Soit, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $P(n)$: $J^n = 3^{n-1}J$.

   Initialisation : $n = 1$ et $3^0J = J$ donc $P(1)$ est vraie.

   Hérédité : Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $P(n)$ vraie implique $P(n+1)$ vraie.

$$\begin{aligned} P(n)\,\text{est vraie} &\Leftrightarrow J^n = 3^{n-1}J \\ &\Rightarrow J^n \times J = (3^{n-1}J)J \\ &\Rightarrow J^{n+1} = 3^{n-1}(J \times J) \\ &\Rightarrow J^{n+1} = 3^{n-1}J^2 \\ &\Rightarrow J^{n+1} = 3^{n-1} \times 3J \\ &\Rightarrow J^{n+1} = 3^nJ \end{aligned}$$

   donc $P(n+1)$ est vraie.

   Ainsi pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{J^n = 3^{n-1}J}$
2. On remarque le lien entre A, I et J : $A = J - I$ donc pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = (J-I)^n$.

   Une alternative est l'utilisation de la formule du binôme de Newton (en effet I et J communtent) :

$$\begin{aligned}
A^n &= \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} J^k (-I)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} J^k I^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} J^k \quad (\text{car } J^k I^{n-k} = J^k I = J^k) \\
&\text{à } \textit{ce stade on veut utiliser la question } 1 \\
&\textit{mais la relation n'est valable qu'à partir de } k = 1 \\
&= (-1)^n I + \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} 3^{k-1} J \quad (\textit{terme pour } k = 0 \textit{ désolidarisé de la somme}) \\
&= (-1)^n I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} 3^k \right) J \\
&= (-1)^n I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} 3^k - (-1)^n \right) J \quad (\textit{objectif retrouver le binôme de Newton}) \\
&= (-1)^n I + \frac{1}{3} \left((3-1)^n - (-1)^n \right) J \\
&= (-1)^n I + \frac{2^n - (-1)^n}{3} J
\end{aligned}$$

Suivant la parité de n, on obtient

$$\boxed{A^n = \begin{cases} I + \dfrac{2^n - 1}{3} J & \textit{si } n \textit{ pair} \\[2ex] -I + \dfrac{2^n + 1}{3} J & \textit{si } n \textit{ impair} \end{cases}}$$

EXERCICE 3 :

$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & x \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ M(x)M(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(x+y)^2 & 1 & x+y \\ -2(x+y) & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(x+y)$.

La dernière relation, écrite pour $y = -x$, donne $M(x)M(-x) = M(0) = I_3$. On peut donc conclure que $M(x)$ est inversible et

$$M(x)^{-1} = M(-x)$$

Remarque $I_3 \in G$ (I_3 élément neutre de la multiplication matricielle) , G est stable par produit matriciel et tout élément de G admet un inverse : on dit alors que $(G, \times)$ est un groupe et un sous-groupe de $\mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$.

EXERCICE 4 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, on écrit le système linéaire relatif à la relation matricielle $AX = B$, ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+2y+3z=a \\ x+y+4z=b \\ x-2y+z=c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{5}a-\dfrac{8}{15}b+\dfrac{1}{3}c \\[2mm] y=\dfrac{1}{5}a-\dfrac{1}{15}b-\dfrac{1}{3}c \\[2mm] z=-\dfrac{1}{5}a+\dfrac{2}{5}b \end{array}\right.$$

Pour toute matrice B, le système précédent a une solution unique donc A est inversible et A^{-1} est égale à

$$\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 9 & -8 & 5 \\ 3 & -1 & -5 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad (AX=B \Leftrightarrow X=A^{-1}B)$$

2. On forme $(A|I_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1\leftrightarrow L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1, L_3\leftarrow L_3-L_1}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2\leftrightarrow L_3, L_2\leftarrow -1/3L_2, L_3\leftarrow -1/5L_3}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 2/5 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2\leftrightarrow L_2-L_3}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & -1/15 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 2/5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1\leftarrow L_1-4L_3}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 4/5 & -3/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & -1/15 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 2/5 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1\leftarrow L_1-L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/5 & -8/5 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & -1/15 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 2/5 & 0 \end{array}\right)$$

On vient d'obtenir $(I_3|A^{-1})$.

3. Les calcils de A^2 et de A^3 donne

$$A^2=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 17 \\ 7 & -5 & 11 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } A^3=\begin{pmatrix} 35 & -16 & 44 \\ 20 & -13 & 12 \\ -4 & 8 & -9 \end{pmatrix}$$

Comme $\mathrm{tr}(A)=4$, on calcule $A^3-4A^2-15I_3=\begin{pmatrix} -16 & -16 & -24 \\ -8 & -8 & -32 \\ -8 & 16 & -8 \end{pmatrix}$ et on remarque que l'on trouve la matrice $-8A$. On obtient donc

$$A^3-4A^2+8A-15I_3=O_3 \Rightarrow A(A^2-4A+8I_3)=15I_3$$

$\Rightarrow A$ est inversible et $A^{-1}=\dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 9 & -8 & 5 \\ 3 & -1 & -5 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

EXERCICE 5 :

$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de période T. f admet $L\in\mathbb{R}$ pour limite en $+\infty$.

1. $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} L \Rightarrow \forall\epsilon>0$, il existe $A>0$ tel que

$$\forall t\in\mathbb{R},\ t\geqslant A \Rightarrow |f(t)-L|\leqslant\epsilon \quad (D)$$

2. Soit $x\in\mathbb{R}$ fixé. $x+nT>A \Leftrightarrow nT>A-x \Leftrightarrow n>\dfrac{A-x}{T}$. On choisit donc $n=\mathrm{E}\left(\dfrac{A-x}{T}\right)+1$.

3. Comme $x+nT>A$, en utilisant la définition (D), on peut écrire que $|f(x+nT)-L|\leqslant\epsilon$, ce qui compte-tenu de la périodicité de f, donne $|f(x)-L|\leqslant\epsilon$.

   Il est donc établi que pour tout $\epsilon>0$, $|f(x)-L|\leqslant\epsilon$, ce qui implique que $|f(x)-L|=0$ et donc $f(x)=L$.
   Ce qui précède étant vrai pour tout réel x, la fonction f est constante et égale à L.

Remarque Il est peut-être utile de revenir sur le fait que : soit a un réel, $\forall \epsilon > 0,\ |a| < \epsilon \Rightarrow a = 0$.

Supposons $a \neq 0$, existe-t-il un réel $\epsilon > 0$ tel que $|a| \geqslant 0$? en choisissant $\epsilon = \dfrac{|a|}{2}$, on a $|a| \geqslant \dfrac{|a|}{2}$ et $\dfrac{|a|}{2} > 0$ puisque $a \neq 0$. Compte-tenu de $|a| \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$, on a établi la contraposée du résultat escompté.

EXERCICE 6 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 qui vérifie $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. La relation fonctionelle appliquée à $\dfrac{x}{2}$ donne $f\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Par une démonstration par récurrence, on démontre que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x).$$
2. La suite $\left(\dfrac{x}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. De plus f est continue en 0 donc $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f(0)$ donc la suite $\left(f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\right)$ est convergente de limite $f(0)$.

   or d'après ce qui précède, $\left(f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\right)$ est une suite constante égale à $f(x)$. Par unicité de la limite d'une suite, on conclut que
$$f(x) = f(0)$$