Applications linéaires

Exercice 1 *Les applications suivantes sont-elles linéaires ?*

1. $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *définie par* $f(x,y)=(x+y,2x-y,x-3y)$
2. $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x,y)=2x+y-1$.
3. $f:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x,y,z,t)=x-t$.
4. $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *définie par* $f(x)=(x,0,x,0)$.
5. $f:\mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ *définie par* $f(P(X))=X(P(X)+P(2))$
6. $f:\mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *définie par* $f(P(X))=(P(1),P(2))$
7. $\varphi:\mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $\varphi(f)=f(1)$.
8. $\varphi:\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *définie par* $\varphi(f)=f'-2f$.
9. $\varphi:\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *définie par* $\varphi(f)=f'-f^2$.

Noyau et Image

Exercice 2 *Soit* $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *définie par* $f(x,y,z)=(x+y,y+z,x-z)$, *justifier que* f *est linéaire, déterminer* $\ker f$ *et* $\operatorname{Im} f$.

Exercice 3 *Soit* $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ *définie par* $f(1,0,0)=(1,-1,2)$, $f(0,1,0)=(2,0,-1)$ *et* $f(0,0,1)=(1,1,1)$. *Donner l'image d'un vecteur* (x,y,z) *quelconque de* $\mathbb{R}^3$. *Déterminer* $\ker f$ *et* $\operatorname{Im} f$.

Exercice 4 *Soit* $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *définie par* $f(M)={}^tM-2M$, *justifier que* f *est linéaire, déterminer son noyau et son image. Montrer que* f *est un isomorphisme, donner une expression de* f^{-1}.

Exercice 5 *Soit* $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$ *et* $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *définie par* $f(M)=AM-MA$, *justifier que* f *est linéaire, déterminer* $\ker f$ *et* $\operatorname{Im} f$.

Exercice 6 *Soit* $\varphi:\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *définie par* $\varphi(f)=f'-2f$. *Déterminer* $\ker\varphi$. *Que peut-on en déduire ? Montrer que* φ *est surjective.*

Exercice 7 *Soit* $f:\mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *définie par* $f(P(X))=(P(1),P(2))$, *déterminer son noyau et son image.*

Exercice 8 *Soit* $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *définie par* $f(x_1,\cdots,x_n)=(\sum_{k=1}^n x_k,\cdots,\sum_{k=1}^n x_k)$, *(montrer que* $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ *). Déterminer* $\ker f$ *puis* $\operatorname{Im} f$.

Exercice 9 *Soit* $f:\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *définie par* $v=f(u)$ *où* $v_n=u_{n+1}-2u_n$. *Quel est le noyau de* f *? (Un peu plus dur, quelle est l'image ?).*

Exercice 10 *Soit* $f:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\\(x,y,z)\mapsto(x+2y-z,-y+z,2x-y+3z)\end{array}\right.$, *déterminer* $\ker(f)$ *et résoudre l'équation linéaire* $f(u)=b$ *dans les deux cas suivant* $b=(3,-1,+1)$ *et* $b=(1,0,1)$. *Déterminer* $\operatorname{Im}(f)$ *et interpréter les deux résultats.*

Exercice 11 *Soit* $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *définie par* $f(x,y)=(x+y,x-y)$, *montrer que* $f\in GL(\mathbb{R}^2)$ *et déterminer* f^{-1}.

Exercice 12 *Soit* E,F *deux* $\mathbb{K}$ *ev, et* $f\in\mathcal{L}(E,F)$, *soit* $\Phi:\left|\begin{array}{l}E\times F\to E\times F\\(x,y)\mapsto(x,y-f(x))\end{array}\right.$, *montrer que* Φ *est un automorphisme de* $E\times F$.

Calcul dans $L(E)$

Exercice 13 *Soit* $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *définie par*

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+2y\\-2x+4y\end{pmatrix}$$

Montrer que pour $k\geq 1$, $f^k=3^{k-1}f$. *On pose alors* $g=f+I$ *(où* $I=Id_{\mathbb{R}^2}$*) en déduire* g^n *pour* $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 14

1. *Soient f et g deux endomorphismes de E vérifiant $f = 3Id_E + g$ et $g^2 = 0$. Montrer que $f^n = 3^n Id_E + n3^{n-1}g$.*
2. *Application : Calculer $f^n(x,y)$ lorsque $f(x,y) = 3(x,y) + (-2x+y, -4x+2y)$.*
3. *Application : On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et*

$$\left\{\begin{array}{r} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + 5v_n \end{array}\right.$$

Calculer u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 15 *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f\left(\overrightarrow{i}\right) = 4\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$, $f\left(\overrightarrow{j}\right) = 6\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j} - 6\overrightarrow{k}$ et $f\left(\overrightarrow{k}\right) = -5\overrightarrow{k}$ où $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose $\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.*

1. *Calculer $f(\overrightarrow{u})$ et $f(\overrightarrow{v})$.*
2. *Montrer que $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $\overrightarrow{a}$ de coordonnées (x,y,z) dans $\mathcal{B}$, donner les coordonnées de $f(\overrightarrow{a})$ dans $\mathcal{B}$.*
3. *Justifier que f est un isomorphisme. Déterminer $E_1 = \ker(f - I)$, $E_{-2} = \ker(f + 2I)$ et $E_{-5} = \ker(f + 5I)$.*
4. *Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $g \circ f = f \circ g$, déterminer la forme générale de g en utilisant la base $\mathcal{B}$.*

Projections, symétries

Exercice 16 *Dans les deux cas suivants, on admet que $E = F \oplus G$, Déterminer l'expression analytique de la projection sur F suivant G :*

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = 0\}$ *et* $G = \mathrm{Vect}(1,1,0)$.
2. $E = \mathbb{R}^4$, $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y - z = t = 0\}$ *et* $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x - y = z - t = 0\}$.

Exercice 17 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x + y + \alpha z, y, y)$. Déterminer α pour que f soit un projecteur. Préciser alors sa base et sa direction.*

Exercice 18 *E désigne ici un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E vérifiant l'égalité :*

$$f^2 - 2f - 3I = 0,$$

où $f^2 = f \circ f$ et I désigne l'application identité de E ($I = Id_E$). On note g et h les éléments de $\mathcal{L}(E)$ définie par $g = f - 3I$ et $h = f + I$.

1. *Déterminer $g \circ h$ et $h \circ g$. Montrer que $\ker g \oplus \ker h = E$.*
2. *Soit p la projection sur G de direction H et $q = I - p$, justifier que $f = 3p - q$.*
3. *Exprimer, pour $n \geq 1$, f^n uniquement à l'aide de p et de q.*

Exercice 19 *Soit E un $\mathbb{K}$ ev et p, q deux projecteurs, prouver que :*

1. $\ker(p) = \ker(q) \Longleftrightarrow p = p \circ q$ *et* $q = q \circ p$.
2. $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(q) \Longleftrightarrow p = q \circ p$ *et* $q = p \circ q$

Exercice 20 *Soit E un $\mathbb{K}$ ev et p, q deux projecteurs tels que $p \circ q = 0$. Montrer que $f = p + q - q \circ p$ est un projecteur de noyau $\ker(p) \cap \ker(q)$ et d'image $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$.*

Exercice 21 *Soit E un $\mathbb{K}$ ev et p, q deux projecteurs, montrer que :*

1. *$p + q$ est un projecteur $\Longleftrightarrow p \circ q + q \circ p = 0 \Longleftrightarrow p \circ q = q \circ p = 0$.*

2. *Lorsque $p+q$ est un projecteur :* $\ker(p+q)=\ker(p)\cap\ker(q)$ *et* $\mathrm{Im}(p+q)=\mathrm{Im}(p)+\mathrm{Im}(q)$

Exercice 22 *Soit E un $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) espace vectoriel et $u\in\mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe $n\in\mathbb{N}^*$ vérifiant $u^n=Id_E$. Soit V un sous espace stable par u (i.e. $u(V)\subset V$) et p un projecteur d'image V. On définit*

$$q=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u^k\circ p\circ u^{n-k}$$

Comparer $u\circ q$ et $q\circ u$, montrer que $\mathrm{Im}\,q\subset V$, déterminer $p\circ q$ enfin montrer que q est un projecteur.

Exercice 23 *Soit $(f,g)\in\mathcal{L}(E)^2$ Montrer que $(f\circ g=f$ et $g\circ f=g)\Longleftrightarrow(f$ et g sont des projecteurs de même noyau$)$*

Plus théorique

Exercice 24 *Soit E un $\mathbb{K}$ ev,et $(f,g)\in\mathcal{L}(E)^2$, montrer que: $g\circ f=0\Longleftrightarrow\mathrm{Im}(f)\subset\ker(g)$.*

Exercice 25 *Soit E un $\mathbb{K}$ ev,et $(f,g)\in\mathcal{L}(E)^2$ tels que $f\circ g=0$, a-t'on toujours $g\circ f=0$?*

Exercice 26 *Soit E un $\mathbb{K}$ ev, et $(f,g)\in\mathcal{L}(E)^2$ tels que $f\circ g=g\circ f$. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g. (On rappelle que $A\subset E$ est dite stable par g si $(x\in A)\Rightarrow(g(x)\in A)$)*

Exercice 27 *Soit E, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u\in\mathcal{L}(E)$ tel que $u^3=u^2$, simplifier $u^2\circ(u-I)$ (où $I=Id_E$). En déduire que si u est un automorphisme de E, alors $u=I$.*

Exercice 28 *Soit E un $\mathbb{K}$ ev et $f\in\mathcal{L}(E)$, on suppose que $\forall x\in E$, $f(x)$ est colinéaire à x. Montrer que f est une homothétie. (On pourra comparer $f(x)$, $f(y)$ et $f(x+y)$ avec $x\in E$, $x\neq 0$ fixé).*

Exercice 29 *Soit E un espace vectoriel et $f\in\mathcal{L}(E)$ telle que $f^3+f=0$ et $f\neq 0$. Montrer que $E=\ker f\oplus\ker\left(f^2+Id\right)$.*

Exercice 30 *Soit $(f,g)\in\mathrm{L}(E)^2$ tels que $f^2=f$ et $g\circ f=0$. Montrer que $\mathrm{Im}(f+g)=\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)$*

Exercice 31 *Soit E un $\mathbb{K}$ ev, et $(f,g)\in\mathcal{L}(E)^2$ tels que $f\circ g\circ f=f$. Montrer que :*

1. $\ker(f)+\mathrm{Im}(g)=E$
2. $\mathrm{Im}(f)\cap\ker(g)=\{0\}$

Exercice 32 *Soit E un $\mathbb{K}$ ev, et $f\in\mathcal{L}(E)$. Montrer que :*

1. $\ker(f)=\ker(f^2)\Longleftrightarrow\ker(f)\cap\mathrm{Im}(f)=\{0\}$
2. $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Im}(f^2)\Longleftrightarrow E=\ker(f)+\mathrm{Im}(f)$

Exercice 33 *Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ telle que $f^3=f^2+f$, montrer que $E=\ker f\oplus\mathrm{Im}\,f$.*