Chapitre 25

Probabilités sur un univers fini

Sommaire

Le calcul des probabilités est la branche des mathématiques qui modélise les phénomènes aléatoires [1].

I UNIVERS FINIS

1) Expérience aléatoire

Définition 25.1

Une expérience est dite aléatoire lorsque l'issue ne peut pas être prédite avec certitude (on parle aussi d'épreuve aléatoire). On considère qu'à une expérience aléatoire correspond un ensemble contenant tous les résultats possibles, cet ensemble est appelé **univers** *et noté* Ω.

Remarque 25.1 – *On ne donne pas de définition mathématique du terme* expérience. *Par contre, l'univers* Ω *associé à une expérience aléatoire, est un ensemble au sens mathématique du terme, sa détermination résulte d'une modélisation de l'expérience (avec éventuellement des choix simplificateurs).*

☞**Exemples** :

- Expérience : on lance un dé, on note le numéro de la face supérieure.
  Univers : $\Omega = [\![1;6]\!]$.
- Expérience : on lance trois dés distincts, on note les trois numéros de la face supérieure.
  Univers : $\Omega = [\![1;6]\!]^3$, ensemble des triplets de nombres entre 1 et 6.
- Expérience : on prélève trois cartes d'un jeu de 32.
  Univers : Ω est l'ensemble des parties à 3 éléments de l'ensemble des 32 cartes.

1. Andreï Kolmogorov (25 avril 1903 – 20 octobre 1987) : mathématicien russe, fondateur de la théorie des probabilités dans les années 30.

– Expérience : on lance une pièce n fois.
Univers : $\Omega = \{P, F\}^n$ avec P pour pile et F pour face.

Conformément au programme on se limitera au cas où Ω est un ensemble non vide et fini.

2) Évènements

Définition 25.2

On considère une expérience dont l'univers est Ω (fini).

*• Les éléments de Ω sont appelés les **possibles** (ou éventualités), en général notés avec une lettre minuscule : $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.*

*• On appelle **événement** toute partie de Ω. Un singleton est appelé **événement élémentaire**. L'ensemble des événements est donc $\mathscr{P}(\Omega)$.*

*• L'ensemble vide est appelé **événement impossible** et Ω et appelé **événement certain**.*

*• Si A est un événement, on appelle **événement contraire** l'événement $\overline{A}$ (parfois noté A^c, c'est le complémentaire de A dans Ω).*

• On dit que l'événement A implique (ou entraîne) l'événement B lorsque $A \subset B$.

☞**Exemple** : Expérience : lancer un dé. Univers $\Omega = [\![1;6]\!]$. Les événements élémentaires sont $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$. L'événement « obtenir un chiffre pair » est représenté par $A = \{2, 4, 6\}$, l'événement « obtenir un chiffre impair » est l'événement contraire, représenté par $A^c = \{1, 3, 5\}$. L'événement « obtenir le chiffre 1 » implique l'événement « obtenir un chiffre impair ».

Définition 25.3 (Opérations sur les événements)

On considère une expérience dont l'univers est Ω (fini). Soient A et B deux événements.

• L'événement « A ou B » est représenté par la réunion $A \cup B$.

• L'événement « A et B » est représenté par l'intersection $A \cap B$ (conjonction des événements).

*• On dira que ces deux événement sont **incompatibles** (ou disjoints) lorsque $A \cap B = \varnothing$.*

☞**Exemple** : Tout événement est incompatible avec l'événement contraire.

Définition 25.4 (Système complet d'événements)

*On considère une expérience dont l'univers est Ω (fini). Soit $(A_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ une famille d'événements, on dit que cette famille est un **système complet d'événements** lorsque :*

• les événements sont deux à deux incompatibles : $\forall (i, j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$.

• la réunion des ces événements est l'événement certain : $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Remarque 25.2 – *On retrouve une partie de la définition de partition, la différence est qu'on ne demande pas à ce que les événements A_i soient non vides.*

☞**Exemples** :
– Si A est un événement alors $\{A; A^c\}$ est un système complet d'événements.
– La famille des événements élémentaires, $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$, est un système complet d'événements.

II ESPACES PROBABILISÉS

Une fois l'expérience clairement définie et son univers déterminé, on cherche à définir le pourcentage de chance de réalisation des événements. L'approche statistique consiste à répéter n fois l'expérience et calculer la fréquence de réalisation de chaque événement A : $f_n(A) = \frac{\text{nombre de réalisations de A}}{n}$. La fréquence apparaît alors comme une application de $\mathscr{P}(\Omega)$ vers $[0;1]$ qui vérifie $f_n(\Omega) = 1$ et $f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$ lorsque A et B sont incompatibles (il en découle qu'il suffit de connaître la fréquence de chaque événement élémentaire). C'est cette approche qui est à l'origine de la définition suivante.

1) Probabilité

Définition 25.5

*Soit Ω un univers fini. On appelle **probabilité** sur Ω toute application $\mathbb{P}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ vers $[0;1]$ vérifiant :*
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- $\mathbb{P}$ *est **additive**, c'est à dire :*

$$\forall\ A, B \in \mathscr{P}(\Omega), \text{ si } A \text{ et } B \text{ sont incompatibles, alors } \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

*Le couple $(\Omega, \mathbb{P})$ est appelé **espace probabilisé**.*

Exemples :
- Si Ω est fini, alors en posant pour tout événement A, $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$, on définit une probabilité sur Ω.
- Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, alors en posant pour tout événement A, $\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_1 \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, on définit une probabilité sur Ω.

Attention !

Il n'y a pas unicité de la probabilité sur un univers fini, le choix de celle-ci fait partie de la modélisation de l'expérience et résulte souvent d'une hypothèse (par exemple : toutes les issues sont équiprobables).

2) Propriétés

Théorème 25.1

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et soient A et B deux événements :
- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$;
- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
- *si* $A \subset B$ *alors* $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ *(on dit que $\mathbb{P}$ est **croissante**) et* $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$;
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$;
- *pour toute famille $(A_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ d'événements **incompatibles deux à deux** :*

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

Preuve :
- On a $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \cup \varnothing) = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\varnothing) = 1 + \mathbb{P}(\varnothing)$, d'où le résultat.
- On a $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$, d'où le résultat.
- On a $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup B \setminus A) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geqslant \mathbb{P}(A)$ car une probabilité est positive. Les deux résultats en découlent.
- On a $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}([A \cap B] \cup B \setminus A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A)$, d'où $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$, puis on a $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$, le résultat en découle.
- récurrence sur n. □

★**Exercice 25.1** ***(Inégalité de Boole)***

Montrer que toute famille d'événements $A_1, \dots, A_n$ on a $\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.

Théorème 25.2

Soit $(A_i)_{1 \in [\![1;n]\!]}$ un système complet d'événements, on a :
- $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = 1$;
- *Pour tout événement B :* $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i)$.

Preuve : Les événements de la famille sont incompatibles deux à deux et leur réunion donne Ω, donc $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.

$B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup \dots \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup \dots \cup (B \cap A_n)$ et ces événements sont incompatibles deux à deux, d'où $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i)$. □

3) Probabilité des événements élémentaires

Une probabilité $\mathbb{P}$ sur un univers fini Ω est entièrement déterminée par la connaissance des probabilités des événements élémentaires.

Théorème 25.3

Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ un univers fini.

• Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω et soit $p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\})$, on a alors : $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $p_i \geqslant 0$, et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

• Réciproquement, si $(p_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une famille de réels positifs et de somme égale à 1, alors il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$. Pour tout événement A, on a alors $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i\in A} p_i$.

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

★**Exercice 25.2** *On lance un dé truqué à 6 faces, la probabilité d'obtenir la face k est proportionnelle à k. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair ?*

Théorème 25.4

*Sur tout univers fini Ω, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ qui prend la même valeur sur chaque événement élémentaire (on parle d'événements équiprobables). Elle est définie par $\forall \omega \in \Omega, \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\mathrm{card}(\Omega)}$, on l'appelle **probabilité uniforme** sur Ω, et pour tout événement A on a $\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}$.*

Preuve : Il suffit de vérifier que la valeur commune est un réel positif, et que $\sum_{\omega\in\Omega} \frac{1}{\mathrm{card}(\Omega)} = 1$. On a alors $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in A} \frac{1}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}$. □

Remarque 25.3 – *La formule $\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}$ s'énonce parfois « nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles », dans ce cadre, calculer des probabilités se ramène à des calculs de dénombrement.*

★**Exercice 25.3**

1/ On lance six fois un dé non truqué. Quelle est la probabilité d'obtenir une fois chaque numéro ?

2/ On prélève cinq cartes au hasard dans un jeu de 52. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une paire ?

3/ On distribue 52 cartes à 4 joueurs (13 par joueur). Quelle est la probabilité que chacun reçoive un as ?

III PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un univers fini muni de la probabilité uniforme (par exemple), soit A un événement dont on sait qu'il est réalisé, un événement B est réalisé si et seulement si $A \cap B$ est réalisé, donc la probabilité de B sachant que A est réalisé est $\frac{\mathrm{card}(A\cap B)}{\mathrm{card}(A)} = \frac{\mathrm{card}(A\cap B)/\mathrm{card}(\Omega)}{\mathrm{card}(A)/\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$.

1) Définition

Définition 25.6

*Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Pour tout événement B on appelle **probabilité de** B **sachant** A le réel noté $\mathbb{P}_A(B)$ est défini par $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$.*

Théorème 25.5 (probabilité conditionnelle)

*Si A est un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors l'application $\mathbb{P}_A : \mathscr{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ est une probabilité sur Ω, appelée **probabilité conditionnelle** sachant A.*

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

Attention !

On veillera à ne pas confondre $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$.

Remarque 25.4 –

- *Dans certains ouvrages la probabilité conditionnelle* $\mathbb{P}_A(B)$ *est notée* $\mathbb{P}(B \mid A)$, *mais nous éviterons cette notation qui pourrait laisser croire que* $B \mid A$ *est un événement.*
- *Comme* $\mathbb{P}_A$ *est une probabilité, on a en particulier* $\mathbb{P}_A(B^c) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$.

★**Exercice 25.4** *Une famille a deux enfants, chaque enfant a une chance sur deux d'être une fille.*

1/ *Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant que l'aînée est une fille ?*

2/ *Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant qu'il y a au moins fille ?*

2) Probabilités composées

La plupart du temps on ne calcule pas $\mathbb{P}_A(B)$ à partir de $\mathbb{P}(A\cap B)$ car le plus souvent on connaît $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}(A)$ ce qui permet d'en déduire $\mathbb{P}(A\cap B)$.

Théorème 25.6

Si A *et* B *sont deux événements alors :*

- $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}_A(B)$ *si* $\mathbb{P}(A)\neq 0$;
- $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(B)\times\mathbb{P}_B(A)$ *si* $\mathbb{P}(B)\neq 0$.

Preuve : Il suffit de revenir à la définition de probabilité conditionnelle. □

★**Exercice 25.5** *Une urne contient* 4 *boules blanches et* 2 *noires. On tire une boule, on la remet dans l'urne en ajoutant une autre boule de la même couleur, puis on procède à un autre tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires ?*

Théorème 25.7 (formules des probabilités composées)

Soient $(A_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ *une famille d'événements* ($n \geqslant 2$) *telle que* $\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})\neq 0$, *alors :*

$$\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\times\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\times\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\times\cdots\times\mathbb{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n).$$

Preuve : Remarquons que toutes les probabilités conditionnelles de la formule sont bien définies car $0\neq\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})\leqslant\cdots\leqslant\mathbb{P}(A_1\cap A_2)\leqslant\mathbb{P}(A_1)$. La formule se démontre par récurrence sur n, le théorème précédent est le cas $n=2$. En appliquant l'hypothèse de récurrence on a :

$$\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_1)\times\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\times\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\times\cdots\times\mathbb{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n\cap A_{n+1})$$

notons $B = A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}$, alors :

$$\mathbb{P}_B(A_n\cap A_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}(B\cap A_n\cap A_{n+1})}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B\cap A_n)\times\mathbb{P}_{B\cap A_n}(A_{n+1})}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}_B(A_n)\times\mathbb{P}_{B\cap A_n}(A_{n+1})$$

en reportant dans la relation ci-dessus, on obtient la formule au rang $n+1$. □

Remarque 25.5 – *Le produit à droite de l'égalité dans le théorème est un produit télescopique.*

À retenir

Cette formule est utile lorsque les événements sont dans un ordre chronologique.

★**Exercice 25.6** *Une urne contient* n *boules :* b *blanches et* r *rouges. Soit* $k\in[\![1;b+1]\!]$. *On tire des boules successivement de cette urne sans remise. Quelle est la probabilité qu'une boule rouge apparaisse pour la première fois au* k^e *tirage ?*

★**Exercice 25.7** *Une puce se déplace sur les trois sommets* A, B C *d'un triangle en partant de* A. *À chaque instant elle fait un saut : si elle est en* A *alors elle va en* B, *si elle est en* B *alors elle a une chance sur deux d'aller en* A *et une chance sur deux d'aller en* C, *si elle est en* C *elle y reste.*

1/ *Montrer qu'on ne peut arriver en* C *qu'à des instants pairs.*

2/ *Quelle est la probabilité que la puce arrive en* C *pour la première fois à l'instant* $2n$ *?*

3) Formule des probabilités totales

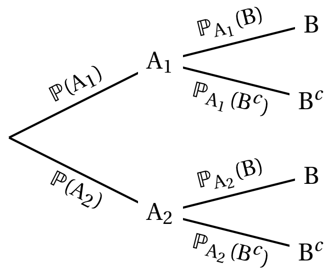
Soit $(A_1,\ldots,A_n)$ un système complet d'événements sur un espace probabilisé fini $(\Omega,\mathbb{P})$, on a déjà vu que pour tout événement B, on a $\mathbb{P}(B) = \sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{P}(B\cap A_k)$, or nous savons que $\mathbb{P}(B\cap A_k) = \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)$ lorsque $\mathbb{P}(A_k)\neq 0$. Nous pouvons donc énoncer :

Théorème 25.8 (formule des probabilités totales)
Soit $(A_1,\dots,A_n)$ *un système complet d'événements sur un espace probabilisé fini* $(\Omega,\mathbb{P})$*, tous de probabilité non nulle, alors pour tout événement* B *on a :*
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B).$$

★**Exercice 25.8** *Le fonctionnement d'un appareil est régi par la règle suivante :*
- *s'il fonctionne à l'instant* t_n *alors il a la probabilité* $a \in]0;1[$ *de fonctionner à l'instant* t_{n+1} *;*
- *s'il est en panne à l'instant* t_n *alors il a la probabilité* $b \in]0;1[$ *d'être en panne à l'instant* t_{n+1}.

Il est en état de marche à l'instant 0*. Déterminer la probabilité* p_n *qu'il soit en état de marche à l'instant* t_n.

Remarque 25.6 – *Lorsque le système complet comporte peu d'événements, on peut illustrer la formule des probabilités totales par un arbre pondéré, mais la justification est l'application de la formule des probabilités totales.*



4) Formule de Bayes

Soient A et B deux événements de probabilité non nulle de l'espace probabilisé $(\Omega,\mathbb{P})$, imaginons que l'on sache calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(B)$ et que l'on souhaite calculer $\mathbb{P}_B(A)$. On a :

$$\boxed{\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}}$$

Cela peut-être utile lorsqu'il y a une chronologie, (A antérieure à B) et que l'on cherche à « remonter le temps ». Dans le cas le plus général, on utilise la formule des probabilités totales pour exprimer $\mathbb{P}(B)$:

Théorème 25.9 (formule de Bayes (ou formule de probabilité des causes))
Soit $(A_1,\dots,A_n)$ *un système complet d'événements sur un espace probabilisé fini* $(\Omega,\mathbb{P})$*, tous de probabilité non nulle, soit* B *un événement de probabilité non nulle, alors pour tout* $i \in [\![1;n]\!]$ *:*
$$\mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)}.$$

Remarque 25.7 – *En particulier, lorsque le système est réduit à deux événements* (A,A^c) *(de probabilité non nulle), et si* $\mathbb{P}(B)\neq 0$*, alors* $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)+\mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}_{A^c}(B)}$.

★**Exercice 25.9** *On a six urnes numérotées de* 1 *à* 6*, l'urne k contient k boules blanches et* $6-k$ *boules noires. On lance un dé non truqué, si la face k sort alors on tire une boule de l'urne k. La boule tirée est blanche, quelle est la probabilité d'avoir fait un* 6 *?*

IV INDÉPENDANCE

1) Indépendance de deux événements

Définition 25.7
On dit que deux événements A *et* B *d'un espace probabilisé* $(\Omega, \mathbb{P})$ *sont indépendants lorsque :*
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Remarque 25.8 –
- *La relation est symétrique.*
- *Si* $\mathbb{P}(A) = 0$ *alors* A *est indépendant avec tout autre événement* B.

À retenir
Lorsque $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.

Exemple : On lance un dé non truqué, soit A :« obtenir un chiffre pair » et B : « obtenir un chiffre inférieur ou égale à 4 ». On $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{3} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, ces deux événements sont indépendants. Soit C :« obtenir un chiffre inférieur ou égale à 3 », on a $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{6} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$, A et C ne sont pas indépendants.

Attention !
On veillera à ne pas confondre indépendance de deux événements (qui dépend de la probabilité) et l'incompatibilité de deux événements (qui ne dépend pas de la probabilité).

Théorème 25.10
Si A *est* B *sont deux événements* ***indépendants*** *de* $(\Omega, \mathbb{P})$ *alors :*
- A *et* B^c *sont indépendants ;*
- A^c *et* B *sont indépendants ;*
- A^c *et* B^c *sont indépendants.*

Preuve : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B^c)$ d'où $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A)[1 - \mathbb{P}(B)] = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)$. Les deux autres résultats en découlent. □

2) Indépendance d'une famille d'événements

Définition 25.8
Soient $A_1, \ldots, A_n$ *des événements dans* $(\Omega, \mathbb{P})$ *:*
- *On dit ces événements sont* ***deux à deux indépendants*** *lorsque :*
$$\forall i, j \in [\![1;n]\!], i \neq j \implies \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$
- *On dit ces événements sont* ***mutuellement indépendants*** *lorsque :*
$$\forall J \subset [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k \in J} A_k\Big) = \prod_{k \in J} \mathbb{P}(A_k).$$

Remarque 25.9 – *La vérification de l'indépendance mutuelle nécessite beaucoup de vérifications :* $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - n - 1$. *Il découle de la définition que des événements mutuellement indépendants sont deux à deux indépendants.*

Attention !
Des événements deux à deux indépendants ne sont pas nécessairement mutuellement indépendants comme le montre l'exemple suivant.

Exemple : On lance deux dés parfaits, on note A_1 : « le premier dé amène un nombre pair », A_2 : « le deuxième dé amène un nombre pair » et A_3 : « la somme des nombres obtenus est paire ». On a $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A_3) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$, mais $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4}$: les événements sont deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants.

★**Exercice 25.10** *Soient* $A_1, \ldots, A_n$ *des événements mutuellement indépendants dans* $(\Omega, \mathbb{P})$.

1/ *Montrer que les événements* $B_1, \ldots, B_n$ *où* $B_i = A_i$ *ou* A_i^c*, sont mutuellement indépendants.*

2/ *Soit* $p \in [\![1;n-1]\!]$*, montrer que* $B_1 \cup \cdots \cup B_p$ *et* $B_{p+1} \cap \cdots \cup B_n$ *sont indépendants.*

V SOLUTION DES EXERCICES

Solution 25.1 *Pour* $n=2$: $\mathbb{P}(A_1\cup A_2)=\mathbb{P}(A_1)+\mathbb{P}(A_2)-\mathbb{P}(A_1\cap A_2)\leqslant \mathbb{P}(A_1)+\mathbb{P}(A_2)$. *On termine ensuite par récurrence sur* n.

Solution 25.2 *On a* $\mathbb{P}(\{k\})=ak$ *avec* k *une constante positive, or* $\sum_{k=1}^{6}\mathbb{P}(\{k\})=1$, *on en déduit que* $a=\frac{1}{1+2+3+4+5+6}=\frac{1}{21}$, *la probabilité demandée est* $\mathbb{P}(\{2,4,6\})=a(2+4+6)=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$.

Solution 25.3

1/ $\Omega=[\![1;6]\!]^6$, *les issues sont considérées équiprobables. L'événement cherché est l'ensemble* 6*-listes contenant une et une seule fois chaque chiffre, par conséquent* $\operatorname{card}(A)=6!$ *et* $\mathbb{P}(A)=\frac{6!}{6^6}\approx 0{,}015$.

2/ Ω *est l'ensemble des* 5*-parties de l'ensemble des cartes. Dénombrons l'événement contraire (aucune paire), il faut donc* 5 *hauteurs de cartes différentes et pour chacune des hauteurs il faut choisir une carte parmi* 4 *ce qui donne* $\binom{13}{5}4^5$ *mains dans cet événement, d'où la probabilité cherchée* $1-\frac{\binom{13}{5}4^5}{\binom{52}{5}}\approx 0{,}49$.

3/ *La probabilité cherchée est* $\frac{4\binom{48}{12}\times 3\binom{36}{12}\times 2\binom{24}{12}\times 1\binom{12}{12}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}}=\frac{4!13^4}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49}\approx 0{,}105$.

Solution 25.4 *L'univers est* $\Omega=\{F,G\}^2$ *ensemble des couples de lettres* F *ou* G *(premier enfant et deuxième enfant).*

1/ *L'événement « l'aînée est une fille » est* $A=\{(F,G),(F,F)\}$ *et* $\mathbb{P}(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. *L'événement cherché est* $B=\{(F,F)\}$ *qui implique* A, *d'où* $\mathbb{P}_A(B)=\frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}=\frac{1}{2}$.

2/ *L'événement « au moins un enfant est une fille » est* $A=\{(F,G);(F,F);(G,F)\}$ *et* $\mathbb{P}(A)=\frac{3}{4}$. *L'événement cherché est* $B=\{(F,F)\}$ *qui implique* A, *d'où* $\mathbb{P}_A(B)=\frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}=\frac{1}{3}$.

Solution 25.5 *Notons* A *l'événement « la première boule tirée est noire », et* B *l'événement « la deuxième boule tirée est noire ». On cherche à calculer* $\mathbb{P}(A\cap B)$, *on a* $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}_A(B)=\frac{2}{6}\times\frac{3}{7}=\frac{1}{7}$.

Solution 25.6 *Soit* B_i *l'événement « au i*^{e} *tirage la boule est blanche (on définit de même* R_i*), on demande :*

$$p(B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap R_k)=p(B_1)p_{B_1}(B_2)\cdots p_{B_1\cap\cdots B_{k-1}}(R_k)=\frac{b}{n}\times\cdots\times\frac{b-k+2}{n-k+2}\times\frac{r}{n-k+1}=\frac{b(b-1)\cdots(b-k+2)r}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}$$

Solution 25.7

1/ *Pour arriver en* C *la puce doit venir de* B *(un saut), pour être en* B *la puce doit venir de* A *et pour arriver en* A *la puce doit venir de* B, *donc avant d'arriver en* C *la puce fait un certain nombre d'aller-retours en* A *et* B, *ce qui donne un instant impair pour être en* B *et donc pair pour être en* C.

2/ *Soit* A_k *l'événement « la puce est en* A *à l'instant* k *» et* B_k *l'événement « la puce est en* B *à l'instant* k *», on cherche donc* $\mathbb{P}(B_1\cap A_2\cap\cdots\cap B_{2n-1}\cap C_{2n})$, *d'après la formule des probabilités composées, c'est :*

$$\mathbb{P}(B_1\cap A_2\cap\cdots\cap B_{2n-1}\cap C_{2n})=\mathbb{P}(B_1)\times\mathbb{P}_{B_1}(A_2)\times\mathbb{P}_{B_1\cap A_2}(B_3)\times\cdots\times\mathbb{P}_{B_1\cap A_2\cap\cdots\cap B_{2n-1}}(C_{2n})$$

ce qui donne $\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}$.

Solution 25.8 *Soit* M_n *l'événement correspondant, alors* (M_n,M_n^c) *est un système complet d'événements donc* $p_{n+1}=\mathbb{P}(M_n)\mathbb{P}_{M_n}(M_{n+1})+\mathbb{P}(M_n^c)\mathbb{P}_{M_n^c}(M_{n+1})=p_na+(1-p_n)(1-b)=(a+b-1)p_n+1-b$, *on a une suite arithmético-géométrique, une solution constante est* $\ell=\frac{1-b}{2-a-b}$ *et la suite* $(p_n-\ell)$ *est géométrique de raison* $a+b-1$, *d'où* $p_n=(a+b-1)^n(p_0-\ell)+\ell$ *avec* $p_0=1$, *ce qui donne* $p_n=\frac{1-b+(a+b-1)^n(1-a)}{2-a-b}$. *On voit que lorsque* $|a+b-1|<1$, *cette suite tend vers* $\frac{1-b}{2-a-b}$.

Solution 25.9 *On a un système complet* $(D_1,\dots,D_6)$ *(résultat du jet de dé), soit* B *l'événement « obtenir une boule blanche », alors on demande* $\mathbb{P}_B(D_6)$, *d'après la formule de Bayes, on a :*

$$\mathbb{P}_B(D_6)=\frac{\mathbb{P}(D_6)\mathbb{P}_{D_6}(B)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{\mathbb{P}(D_6)\mathbb{P}_{D_6}(B)}{\sum_{k=1}^{6}\mathbb{P}(D_k)\mathbb{P}_{D_k}(B)}=\frac{1/6}{\sum_{k=1}^{6}\frac{k}{36}}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}.$$

Solution 25.10

1/ *Il suffit de traiter le cas où un seul des* B_i *est égal* A_i^c *(on peut supposer que c'est* B_n*), si* J *est une partie de* $[\![1;n-1]\!]$, *alors on sait que* $\bigcap_{j\in J}A_j$ *et* A_n *sont indépendants, donc* $\bigcap_{j\in J}A_j$ *et* A_n^c *aussi.*

2/ *On sait que* $B_1^c,\dots,B_p^c,B_{p+1},\dots,B_n$ *sont mutuellement indépendants, donc* $B_1^c\cap\cdots\cap B_p^c$ *et* $B_{p+1}\cap\cdots\cap B_n$ *sont indépendants, par conséquent,* $\left[B_1^c\cap\cdots\cap B_p^c\right]^c=B_1\cup\cdots\cup B_p$ *et* $B_{p+1}\cap\cdots\cap B_n$ *sont indépendants.*