Concours blanc : DS 8 du mercredi 31 mai

Durée : 4 heures de 8h à 12h. Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.

1 Problème d'analyse : intégrale de Dirichlet

On admet dans ce problème que $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie I lorsque x tend vers $+\infty$.

On pose alors $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. On l'appelle l'intégrale de Dirichlet. Le but du problème est de calculer I.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier l'existence de l'intégrale I_n.

On démontre par des arguments similaires que J_n existe.

2. Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[(2n+1)t]}{t}\,\mathrm{d}t$.
3. Soit $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$. Démontrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t} - 1\right).$$
On pourra pour cela écrire $\sin t \cos(2kt)$ à l'aide d'une différence de deux «sinus».
4. En déduire la valeur de J_n.
5. On note φ la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ par $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sin t} - \dfrac{1}{t}$ pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$.
   (a) Déterminer un équivalent simple de φ au voisinage de 0. En déduire que φ se prolonge en une fonction continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On note encore φ la fonction ainsi prolongée.
   (b) Déterminer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\sin^2 t - t^2 \cos t$.
   (c) En déduire que φ est une fonction de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
6. *Lemme de Lebesgue* : soit $h : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$. Pour tout réel $x > 0$, on pose
$$A(x) = \int_0^{\pi} h(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t.$$
   (a) Justifier que pour tout réel $x > 0$, on a
$$A(x) = \frac{h(0) - h(\pi)\cos(\pi x)}{x} + \frac{1}{x}\int_0^{\pi} h'(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t.$$
   (b) En déduire avec soin qu'il existe un réel $M > 0$ tel que
$$\forall x > 0,\ |A(x)| \leqslant \frac{M}{x}.$$
   (c) En déduire la limite de $A(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
7. Déduire des résultats précédents la limite de $J_n - I_n$, puis la valeur de I l'intégrale de Dirichlet.

2 Questions en vrac d'analyse

Les questions sont indépendantes.

1. Déterminer la limite de la suite de terme général :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$$

2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_0^1 f = \frac{1}{2}$. On pose pour $x \in [0,1]$:

$$G(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{x^2}{2}.$$

   (a) Démontrer qu'il existe un réel $c \in]0,1[$ tel que $G'(c) = 0$.

   (b) En déduire que f admet un point fixe dans $]0,1[$.

3. On pose pour $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,\mathrm{d}t.$$

   Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

4. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 0$ (le résultat reste vrai pour $x < 0$), on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x.$$

3 Problème d'algèbre : racines carrées d'une matrice

Danc ce problème, n est un entier naturel non nul.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit qu'une matrice R de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une racine carrée de A si $A = R^2$. On note

$$\mathrm{Rac}(A) = \{R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad | \quad R^2 = A\}.$$

Le problème propose de déterminer les racines carrées de plusieurs matrices.

Les trois sections de ce problème sont indépendantes.

3.1 Quelques premiers exemples

1. Soit t un réel. Que vaut $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & -1 \end{pmatrix}^2$? Interpréter ce résultat en terme de nombres de racines carrées.

2. On munit le plan $\mathbb{R}^2$ de sa base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère r la rotation de centre $(0,0)$ et d'angle θ. On admet que r est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

   (a) Écrire, sans justifier, les vecteurs $r(\overrightarrow{i})$ et $r(\overrightarrow{j})$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$, en déduire la matrice $R(\theta)$ de r dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Déterminer par un argument géométrique une racine carrée de $R(\theta)$.

3.2 Deux autres exemples

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2.1 Quelques généralités sur la matrice A

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer un vecteur f_1 de $\mathbb{R}^3$ tel que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}\{f_1\}$.
4. (a) La matrice A est-elle inversible ? Justifier sans aucun calcul supplémentaire.
   (b) Justifier que la matrice A est équivalente à la matrice N.
   (c) Les matrices A et N sont-elles semblables ?

3.2.2 Réduction de la matrice A

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $f_2 = (-1, -1, 1)$ et $f_3 = (2, -1, 1)$.

5. Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Calculer $u(f_2)$ et $u(f_3)$.
7. En déduire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$.
8. En déduire une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \operatorname{diag}(0, 1, 16)$.

3.2.3 Racines carrées de A

9. Démontrer que R est une racine carrée de A, si et seulement si la matrice $S = P^{-1}RP$ est une racine carrée de D.
10. *Racines carrées de D :* soit S une racine carrée de D.
    (a) Démontrer que $SD = DS$.
    (b) En déduire que la matrice S est diagonale.
    (c) On pose alors $S = \operatorname{diag}(s_1, s_2, s_3)$. Que valent s_1^2, s_2^2, s_3^2 ? En déduire les racines carrées de D.
11. Écrire toutes les racines carrées de A à l'aide de la matrice P et de son inverse (on ne demande pas d'écrire les coefficients des racines carrées).

3.2.4 Cas de la matrice N

On rappelle qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est dite nilpotente d'indice $k \in \mathbb{N}^*$ si $M^k = 0$ et $M^{k-1} \neq 0$.

12. Justifier que la matrice N est nilpotente et donner son indice de nilpotence.
13. Démontrer que si R est une racine carrée de N, alors R est nilpotente. En déduire que N n'admet pas de racines carrées (on pourra utiliser librement que l'indice de nilpotence d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est inférieur ou égal à 3).

3.3 Cas de la matrice I_n

14. Soit $D = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ avec les ε_i des réels valant ± 1. Démontrer qu'une matrice semblable à D est une racine carrée de I_n.
15. Démontrer réciproquement que si R est une racine carrée de I_n, alors R est semblable à une matrice diagonale ne comportant que des 1 ou des -1 sur la diagonale. Conclure.
16. Bonus : combien de classes de similitude contient $\operatorname{Rac}(I_n)$ (si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle classe de similitude de M l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables à M) ?