Devoir surveillé n°7 du samedi 22 avril

Durée : 4 heures de 8h à 12h. Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.

1 Problème : endomorphismes dont l'image et le noyau sont supplémentaires

Problématique : si f est un endomorphisme de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on se demande si on a toujours (et sinon sous quelles conditions) la relation

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f.$$

Ce problème propose quelques réponses à cette problématique.

1.1 Un premier exemple

On considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$g(x, y) = (0, x).$$

1. Vérifier que g est bien linéaire.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$.
3. A-t-on $\mathbb{R}^2 = \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} g$?

1.2 Être un projecteur, une condition suffisante...

Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p un projecteur de E, c'est-à-dire un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$. On se propose dans cette sous-section de redémontrer un résultat de cours.

4. Démontrer que $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p = \{0\}$.
5. Pourquoi peut-on en déduire directement que $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$ lorsque E est de dimension finie ?
6. Démontrer que même lorque E est de dimension infinie, on a $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.
7. Exemple : on note E_1 la droite du plan d'équation $y = x$ et E_2 la droite du plan d'équation $y = 2x$. Déterminer $p(x, y)$ l'image du vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par p la projection vectorielle sur E_1, parallèlement à E_2.

1.3 ...mais pas nécessaire

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$f(x, y, z, t) = (0, -3y, 3x - 3z, y).$$

8. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.
9. En déduire le rang de f.
10. En déduire une base de $\operatorname{Im} f$.
11. Démontrer que l'on a $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.
12. Est-ce que f est un projecteur ?

1.4 Condition nécessaire et suffisante en dimension finie

On suppose dans cette sous-section que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de **dimension finie**. Soit f un endomorphisme de E. On souhaite démontrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes.

(i) $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$

(ii) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$

(iii) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$

13. (a) Démontrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$ et que $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$.
    (b) En déduire que les propositions **(ii)** et **(iii)** sont équivalentes.
14. Démontrer que si $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$, alors $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.
15. Démontrer que si $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$, alors $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
16. Lorsque E est de dimension infinie, les propositions **(i)** et **(iii)** sont-elles équivalentes ?

2 Problème : une équation différentielle linéaire

Le but du problème est de résoudre une équation différentielle linéaire. On cherche à déterminer F l'ensemble des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trois fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = 0.$$

On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour toute fonction y de E, on note $D(y) = y'$ sa fonction dérivée.

On note id_E l'endomorphisme identité de E, et on rappelle que $D^0 = \mathrm{id}_E$ et $\forall n \in \mathbb{N}, D^{n+1} = D \circ D^n$. Ainsi par exemple, si $y \in E$, $D^3(y) = y'''$ désigne la dérivée troisième de y.

1. Démontrer que F est inclus dans E.
2. (a) Justifier que D est un endomorphisme de E.
   (b) Déterminer $\operatorname{Im} D$.
   (c) Déterminer $\operatorname{Ker} D$. Que peut-on en déduire quant à la dimension de E ?

On considère le polynôme $P = X^3 - 2X^2 + X - 2$, et on note $P(D)$ l'endomorphisme de E définie par :

$$P(D) = D^3 - 2D^2 + D - 2\,\underset{E}{\mathrm{id}}.$$

3. Comparer F et $\operatorname{Ker}(P(D))$. Que peut-on déduire quant à la structure de l'ensemble F ?

On considère $H = \operatorname{Ker}(D - 2\,\mathrm{id}_E)$ et $G = \operatorname{Ker}(D^2 + \mathrm{id}_E)$.

4. Démontrer que $(D - 2\,\mathrm{id}_E) \circ (D^2 + \mathrm{id}_E) = P(D)$, puis calculer $(D^2 + \mathrm{id}_E) \circ (D - 2\,\mathrm{id}_E)$.
5. En déduire que G et H sont des sous-espaces vectoriels de F. On pourra utiliser librement le fait que si u et v sont deux endomorphismes de E, alors $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker}(v \circ u)$.
6. Déterminer les élements de H et préciser la dimension de H.
7. Déterminer une base de G, puis déterminer en justifiant la dimension de H.
8. Démontrer que la somme $G + H$ est directe.

9. (a) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle $\dfrac{1}{(X-2)(X^2+1)}$.

   (b) En déduire deux polynômes U et V à préciser tels que :

   $$1 = (X-2)U(X) + (X^2+1)V(X).$$

   (c) Quelle relation sur les endomorphismes obtient-on en substituant D à X ?

10. Soit $y \in F$. Démontrer que $D^2(y) + y \in H$ et $(D - 2\,\mathrm{id}_E) \circ (D + 2\,\mathrm{id}_E)(y) \in G$.

11. En déduire que $F = H + G$, puis donner la dimension de F.

12. Conclure en donnant toutes les solutions réelles de l'équation différentielle :

$$y''' - 2y'' + y - 2y = 0.$$