DEVOIR SURVEILLÉ n°6 du samedi 4 mars

Durée : 4 heures de 8h à 12h. Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

1 Exercices

Exercice 1 (Questions en vrac) Les questions sont indépendantes.

1. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\sqrt{2+3x}$.
2. On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.
   (a) Calculer le développement limité en 1 à l'ordre 2 de f.
   (b) En déduire l'allure locale de la fonction f définie par au voisinage de 1 (faire un schéma).
3. On note φ la fonction φ définie sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ par $\varphi(t)=\dfrac{1}{\sin t}-\dfrac{1}{t}$ pour $t\in]0,\frac{\pi}{2}]$.
   (a) Déterminer un équivalent simple de φ au voisinage de 0. En déduire que φ se prolonge en une fonction continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$. On note encore φ la fonction ainsi prolongée.
   (b) Déterminer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\sin^2 t - t^2\cos t$.
   (c) En déduire que φ est une fonction de classe C^1 sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.
4. Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ une fonction continue qui admet une limite finie en $+\infty$.
   (a) Démontrer que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) La fonction f admet-elle nécessairement un minimum ?
5. On considère l'application f définie sur $]0,+\infty[$ par
$$f(x)=x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor.$$
   où $\lfloor\frac{1}{x}\rfloor$ désigne la partie entière de $\frac{1}{x}$.
   (a) Démontrer que f se prolonge par continuité en 0.
   (b) Déterminer les limites de f en $\frac{1}{2}$ à gauche et à droite . La fonction f est-elle continue en $\frac{1}{2}$?
6. On considère le polynôme $P=(X-a)(X-b)^2(X-c)^3$ avec $a<b<c$ des réels.
   (a) Justifier que P' est divisible par $(X-b)(X-c)^2$.
   (b) Démontrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (Sous-groupe borné de $\mathbb{C}^*$) On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

1. Démontrer que $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$.
2. L'ensemble $\mathbb{U}$ est-il stable par addition ?

Un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$ est dit borné, s'il existe un réel $M>0$ tel que pour tout $z\in G$, $|z|\leqslant M$.

3. Donner deux exemples de sous-groupes bornés de $\mathbb{C}^*$.
4. Donner sans justifier un exemple de sous-groupe de $\mathbb{C}^*$, distinct de $\mathbb{C}^*$ qui n'est pas borné.

Jusqu'à la fin de l'exercice G désigne un sous-groupe borné de $\mathbb{C}^*$. On va montrer que $G\subset\mathbb{U}$.
Soit $z\in G$.

5. On suppose que $|z|>1$. Que dire de la limite de la suite $(|z^n|)_{n\in\mathbb{N}}$? Conclure à une contradiction.
6. Traiter le cas où $|z|<1$ et conclure.

2 Problème : théorème de point fixe de Picard

Le but ce problème est d'établir une version faible du **théorème de point fixe de Picard** :

Théorème 1 (Picard) *Soit I un intervalle fermé et $f : I \to I$. Si f est une fonction k-lipschitzienne avec $k \in [0, 1[$ (on dit que f est **strictement contractante**), alors f admet un unique point fixe a dans I. De plus, pour tout u_0 dans I, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et de premier terme u_0 converge vers a.*

On rappelle que :

- une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est k-lipschitzienne sur I s'il existe un réel k tel que :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

- un intervalle fermé désigne un segment $[a, b]$ ou un intervalle non borné du type $\mathbb{R}$, $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$.

Les trois sections de ce problème sont dans une large mesure indépendantes.

2.1 Importances des hypothèses

1. «1-Lipschitzien insuffisant» : on note f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. On a $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$.
   (a) Démontrer que f est 1-lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.
   (b) Justifier qu'elle n'admet pourtant pas de point fixe dans $[0, +\infty[$.
2. «Intervalle fermé nécessaire» : donner un exemple de fonction affine $f :]0, 1[\to]0, 1[$ strictement contractante sur $]0, 1[$, mais qui n'admet pas de point fixe dans $]0, 1[$.

2.2 Preuve du théorème

Dans cette section uniquement, f désigne une application vérifiant les hypothèses du théorème de Picard.

3. Démontrer que f admet au plus un point fixe.
4. Démontrer qu'une fonction k-lipschitzienne sur I est continue sur I.
5. Démontrer que si I est un segment $[a, b]$, alors f admet un point fixe dans I.
6. On suppose dans cette question que $I = [0, +\infty[$.
   (a) Justifier que pour tout $x \geqslant 0$, on a $f(x) \leqslant f(0) + kx$.
   (b) En déduire que $f(x) - x$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   (c) En déduire que f admet un point fixe dans $[0, +\infty[$.

   Cette preuve se généralise facilement à tout intervalle fermé non borné, ce qui achève la preuve de l'existence du point fixe dans le théorème de Picard.
7. On note a l'unique point fixe de f dans I et u la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et de premier terme $u_0 \in I$.
   (a) Démontrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - a| \leqslant k^n |u_0 - a|.$$
   (b) En déduire que la suite u converge, préciser la limite.