DEVOIR SURVEILLÉ n°4 du samedi 10 décembre

Durée : 4 heures de 8h à 12h. Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

1 Exercices

Exercice 1

1. Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto x \ln x$.
2. Déterminer les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle
$$(E): \quad xy'(x) + 2y(x) = \ln x$$

Exercice 2 Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle :
$$(E) \quad y''(x) + y'(x) + y(x) = x^2 + x + 1.$$

Exercice 3 Étudier la suite (u_n) définie par :
$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \ln(2 - u_n).$$

Exercice 4 (un vrai-faux) Pour toutes les propositions, répondre par vrai ou faux, et surtout **justifier avec précision** votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention, toute réponse sans justification ne sera pas prise en compte.

1. Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et f une solution de l'équation différentielle $y'(x) + a(x)y(x) = 0$. Si f s'annule en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors f est la fonction nulle.
2. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ des réels avec $a \neq 0$ et f une solution de l'équation différentielle $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$. Si f s'annule en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors f est la fonction nulle.
3. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ des réels avec $a \neq 0$ et f une solution de l'équation différentielle $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$. Si f et f' s'annulent en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors f est la fonction nulle.
4. Une suite non majorée tend vers $+\infty$.
5. Une suite croissante qui admet une suite extraite convergente, est convergente.

2 PROBLEME : convergence d'un produit

Soit (u_n) une suite de réels non nuls, on lui associe la suite (p_n) définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \prod_{p=1}^{n} u_p = u_1 u_2 \cdots u_n$$

On dit que le produit (p_n) converge si et seulement si la suite (p_n) admet une limite finie non nulle. Sinon on dit que le produit (p_n) diverge.

PREMIERE PARTIE

1. Soit $p_n = \prod_{p=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$.

   Calculer p_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la nature du produit (p_n).
2. En considérant le quotient $\dfrac{p_n}{p_{n-1}}$ montrer que, pour que le produit (p_n) converge, il est nécessaire que la suite (u_n) converge vers 1.
3. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

(a) Déterminer la limite de la suite (u_n).

(b) En déduire la nature du produit (p_n) associé à (u_n).

4. Soient un réel a différent de $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $p_n = \prod_{p=1}^{n} \cos \dfrac{a}{2^p}$.

   (a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_n \sin \dfrac{a}{2^n} = \frac{\sin a}{2^n}$.

   (b) En déduire que le produit (p_n) converge et donner la limite de la suite (p_n).

DEUXIEME PARTIE

5. Soit (p_n) un produit associé à une suite (u_n) qui converge vers 1.

   (a) Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ u_n > 0$.

   (b) On pose pour $n \geqslant n_0$, $S_n = \sum_{p=n_0}^{n} \ln(u_p)$.

   Démontrer que si la suite (S_n) converge, alors le produit (p_n) converge.

   On montre de la même façon que la réciproque est vraie. Nous avons donc que la convergence de la suite (S_n) équivaut à la convergence du produit (p_n).

6. Soit $p_n = \prod_{p=1}^{n} \sqrt[p]{p}$ et soit $S_n = \sum_{p=1}^{n} \dfrac{\ln p}{p}$.

   (a) Déterminer la monotonie de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

   (b) En déduire que : $\forall p \geqslant 3,\ \int_p^{p+1} \dfrac{\ln x}{x}\, dx \leqslant \dfrac{\ln p}{p}$.

   (c) En déduire la nature de la suite (S_n) et du produit (p_n).

TROISIEME PARTIE

7. Soit $p_n = \prod_{p=1}^{n} (1 + v_p)$ où (v_n) est une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.

   On pose
$$S'_n = \sum_{p=1}^{n} v_p \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{p=1}^{n} \ln(1 + v_p).$$

   (a) Montrer que la suite (S_n) est croissante.

   (b) Montrer que si la suite (S'_n) converge, alors le produit (p_n) converge (on pourra utiliser librement que $\ln(1 + x) \leqslant x$ pour $x \geqslant 0$) .

8. Déduire de la question **1.** la limite de la suite (S'_n) définie par $S'_n = \sum_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p}$.

9. Soit $p_n = \prod_{p=1}^{n} (1 + a^p)$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

   (a) Que dire de la nature du produit (p_n) lorsque $a \geqslant 1$?

   (b) On suppose $a \in]0, 1[$. Montrer que le produit (p_n) converge.

Fin de l'énoncé