DEVOIR SURVEILLÉ n°3 du samedi 19 novembre

Durée : 4 heures de 8h à 12h. Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Exercice 1 (Questions en vrac) Les questions sont indépendantes.

1. Calculer $\arcsin(\sin\frac{27\pi}{5})$, $\arctan(\tan\frac{27\pi}{5})$, $\arccos(\cos\frac{27\pi}{5})$.
2. Donner la dérivée de la fonction f définie par $f(x)=\mathrm{th}(\sin(x^2))$ (ne pas chercher à simplifier la dérivée trouvée).
3. Calculer la limite en 0 de $\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x\sin(x)}$.
4. Calculer la limite en $+\infty$ de $\left(1-\frac{3}{x}\right)^x$.

Exercice 2 (Une équation trigonométrique) Le but de l'exercice est de résoudre l'équation

$$(E):\quad \arctan x+\arctan(x^3)=\frac{3\pi}{4}.$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\arctan x+\arctan(x^3)$.

1. Démontrer la formule d'addition de la tangente : $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$ en précisant pour quelles valeurs de de a et b cette formule a un sens.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée f'.
3. En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.
4. En déduire que l'équation (E) possède une unique solution dans $\mathbb{R}$ notée α qui est comprise entre 1 et π.
5. Démontrer que pour tout réel $x\notin\{-1,1\}$, on a $\dfrac{x+x^3}{1-x^4}=\dfrac{x}{1-x^2}$, puis résoudre l'équation
$$\frac{x+x^3}{1-x^4}=-1.$$
6. En déduire la valeur exacte de α.
7. On note f^{-1} l'application réciproque de f. Sans déterminer f^{-1}, justifier que f^{-1} est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ et calculer le nombre dérivé $(f^{-1})'(\frac{\pi}{2})$.

Exercice 3 (Bijection ou non) Les applications suivantes sont-elles bijectives ? Si, oui déterminer leur application réciproque.

1. $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$
2. $f:\mathbb{R}\to]1,+\infty[$ définie par $f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}+1$.
3. $\cos:[0,3\pi]\to[-1,1]$
4. $\cos:[3\pi,4\pi]\to[-1,1]$.

Exercice 4 (Calcul intégral) Les questions sont indépendantes.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{e}^t}{\sqrt{1+3\mathrm{e}^t}}\,\mathrm{d}t$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1\arctan x\,\mathrm{d}x$.

3. Démontrer que la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{x^3} e^{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ est parallèle à la droite d'équation $y = 3x - 2$.
4. Calculer $I = \displaystyle\int_3^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}$ et $J = \displaystyle\int_3^4 \frac{x}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$.
5. Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{n\sin(x)}{x+n}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 5 On pose pour $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x.$$

1. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$.
2. En déduire la valeur de I_n.
3. En déduire la valeur de
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 6 (Localisation des racines d'un polynôme, un théorème de Cauchy) On ne sait pas résoudre toutes les équations polynomiales. On peut toutefois essayer d'en «localiser» les solutions, c'est-à-dire déterminer une zone du plan complexe où se trouvent les solutions. On considère l'équation (E) : $z^n - a_{n-1}z^{n-1} - \cdots - a_1 z - a_0 = 0$ où les coefficients $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont des réels positifs, non tous nuls.

1. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{x^{n-k}} - 1$ s'annule une seule fois sur $]0, +\infty[$.
2. En déduire que l'équation (E) admet une unique solution réelle strictement positive que l'on note r.
3. Soit $z \in \mathbb{C}$ une solution de (E). Démontrer que $|z| \leqslant r$ (on pourra étudier le signe de $f(|z|)$). Dans quelle zone du plan complexe se trouvent donc les solutions de (E) ?

Fin de l'énoncé