

DEVOIR SURVEILLÉ n°1 du samedi 24 septembre*Durée : 4 heures de 8h à 12h. Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.*

1 Plutôt calculatoire

Exercice 1 (Calcul de sommes) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$1. \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{4i+1}}. \quad 2. \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k+1} 3^k. \quad 3. \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i^2}{j(j+1)}.$$

Exercice 2 (Une somme classique par récurrence) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 3 (Nombres complexes et Brevet de trigonométrie) Les trois questions sont indépendantes.

1. Calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx.$$

2. Donner le module et l'argument principal du nombre complexe

$$Z = (1 + e^{\frac{i\pi}{5}})^{2016}.$$

3. Représenter en justifiant l'ensemble des points d'affixe z tel que $(z-1)^2 \in i\mathbb{R}$ ($i\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des imaginaires purs).

2 Moins calculatoire

Exercice 4 (Négations en vrac) Pour chaque assertion, écrire sa négation puis préciser si l'assertion est vraie.

1. $\forall x \in]-1, 1[, \exists y \in]-1, 1[, y < x.$
2. $\forall x \in [0, +\infty[, x^2 \geq x \geq 0.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, (x \leq 3 \Rightarrow x^2 \leq 9).$

Exercice 5 (Questions en vrac) Les questions sont indépendantes.

1. Soit x un élément d'un ensemble E . Déterminer $\mathcal{P}(\{x\})$ puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{x\}))$.
2. Soit P et Q deux assertions. Est-ce que l'assertion $(P \Rightarrow Q)$ est équivalente à l'assertion $(\text{non } P \text{ ou } Q)$? Justifier.
3. Soient X, Y et Z des parties d'un ensemble E . Démontrer que $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$.
4. Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E . On suppose que

$$A \cup B = A \cup C \quad \text{et} \quad A \cap B = A \cap C.$$

Démontrer que $B = C$. Le résultat subsiste-il si l'on suppose seulement que $A \cup B = A \cup C$?

Exercice 6 (Un peu de dénombrement) Déterminer le nombre d'éléments des ensemble suivants où $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $A = \{(x, y, z) \in \llbracket 1, n \rrbracket^3\}.$
2. B est l'ensemble des triplets (x, y, z) d'éléments distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$.
3. $C = \{(x, y, z) \in \llbracket 1, n \rrbracket^3 \mid x < y < z\}.$

3 Pour finir

Exercice 7 (Une équation fonctionnelle) Le but de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété :

$$\mathcal{P} : \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x) + f(y) = f(x)f(y)$$

Pour cela on raisonne par analyse-synthèse.

1. Analyse : soit f une fonction vérifiant la propriété $\mathcal{P}$.
 - (a) Quelle(s) valeur(s) peut prendre $f(0)$?
 - (b) Que dire de f si $f(0) = 0$?
 - (c) Que dire de f si $f(0) \neq 0$?
2. Synthèse : quelles sont les fonctions vérifiant la propriété $\mathcal{P}$?

Exercice 8 (Le dernier) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n$ des réels tels que

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 = \sum_{k=1}^n x_k = n.$$

Démontrer que $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$.

Fin de l'énoncé¹

1. **Bonus** : soit $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs, démontrer que

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) \geq n^2.$$

Indication : si x est un réel strictement positif, on remarquera que $x + \frac{1}{x}$ est minoré par un certain entier.